TOPOLOGIE - SÉRIE 21

Exercice 1. Les espaces métriques suivants, sont-ils complets?

(a) $\mathbb{Q}$ (b) $]0,1[$ (c) Un ensemble X avec la métrique discrète

Solution.

- NON. Considérons la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, où $x_0 := 3$, $x_1 := 3,1$, $x_2 := 3,14$, $\ldots$, et x_n est le développement décimal de π jusqu'au n-ième chiffre. Donc, elle est de Cauchy parce qu'elle converge vers π dans $\mathbb{R}$, mais elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.
- NON. La suite définie par $x_n := 1 - \frac{1}{n}$ est de Cauchy parce qu'elle converge vers 1 dans $\mathbb{R}$, et donc elle ne converge pas dans $(-1,1)$.
- OUI. En effet, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, alors il y a un nombre $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout m, $n > N$ on a $d(x_m, x_n) < \frac{1}{2}$. Mais cela signifie que $d(x_n, x_m) = 0$, et donc $x_m = x_n$. Pourtant la suite est définitivement constante, et elle converge vers ce valeur.

Remarque. Pour le dernier point, il faut bien distinguer entre un espace métrique discret et un espace métrique, muni de la métrique discrète. Par exemple, $K = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\} \subseteq \mathbb{R}$ avec la métrique induite est un espace métrique discrète mais pas complet.

Exercice 2. Soit X un espace métrique tel qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que tout les $\overline{B(x,\varepsilon)}$ avec $x \in X$ sont compacts. Montrer qu'alors X est complet.

Preuve. Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy, et $\varepsilon > 0$. Alors il y a un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n > N$ on a que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Cela veut dire que la suite est finalement dans la boule $\overline{B(x_{N+1}, \varepsilon)}$, qui est compacte et donc complète. Alors $\{x_n\}_{n>N}$ converge vers in certain $x \in \overline{B(x,\varepsilon)} \subset X$, aussi bien que la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. □

Exercice 3. (Théorème de Baire) Si X est un espace métrique complet et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'ensembles $U_n \subseteq X$ ouverts et denses, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \subseteq X$ est dense aussi.
Indication: Montrer que chaque $U \subseteq X$ ouvert et non-vide intersecte $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

Preuve. On note d'abord qu'un ensemble $M \subseteq X$ est dense si et seulement s'il intersecte tout $U \subseteq X$ ouvert et non-vide. Alors, pour montrer la densité de $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, soit $U \subseteq X$ ouvert et non-vide et définissons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

$$r_n < \frac{1}{n+1}, \qquad \overline{B}(x_n, r_n) \subseteq U, \qquad \overline{B}(x_0, r_0) \subseteq U_0 \text{ et } \overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq B(x_n, r_n) \cap U_{n+1}$$

par récurrence. Parce que $U_0 \subseteq X$ est dense, on peut choisir $x_0 \in U \cap U_0$ et $r_0 \in]0,1[$ tels que

$$\overline{B}(x_0, r_0) \subseteq U \cap U_0.$$

Similairement, si on a déjà $x_0, \ldots, x_n$ et $r_0, \ldots, r_n$, on utilise la densité de U_{n+1} pour choisir $x_{n+1} \in B(x_n, r_n) \cap U_{n+1}$ et $r_{n+1} \in]0, 1/(n+2)[$ tels que

$$\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq B(x_n, r_n) \cap U_{n+1}.$$

Maintenant, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy parce que pour $m < n$ quelconques

$$d(x_m, x_n) < r_m < \frac{1}{m+1} \qquad \text{car} \qquad x_n \in \overline{B}(x_n, r_n) \subseteq B(x_m, r_m).$$

Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un $x \in X$ et on a $x \in U \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ parce que à partir de $N \in \mathbb{N}$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste dans $\overline{B}(x_N, r_N)$, qui est fermé et donc aussi $x \in \overline{B}(x_N, r_N) \subseteq U \cap U_N$. □

Date: 14 mai 2014

Exercice 4. Soit $f\colon X \to Y$ une surjection continue.

(a) Si X est compact, métrisable et Y est de Hausdorff, alors Y est métrisable.
Indication: Construire une base dénombrable.

(b) Si X est localement connexe (i.e. pour tout point, chaque voisinage contient un voisinage connexe) et f est une application quotient, alors Y est localement connexe.
Indication: X est localement connexe ssi tout ses sous-espaces ouverts ont des composantes connexes ouvertes. De plus, la préimage d'une composante connexe par une application continue est une réunion de composantes connexes.

(c) Conclure que chaque quotient de Hausdorff de I est compact, connexe, localement connexe et possède une base dénombrable.
Indication: Une application continue, surjective et fermée est un quotient.

Preuve. Ad (a): Parce que l'espace X est compact et métrisable, il possède une base dénombrable $\mathcal{B}$ et on va montrer que

$$\mathcal{C} := \{Y \setminus f(X \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_n)) \mid n \in \mathbb{N}_{>0}, B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}\}$$

est une base dénombrable pour Y. Clairement, les éléments de $\mathcal{C}$ sont ouverts dans Y parce que f est fermée. De plus, $\mathcal{C}$ est dénombrable, car c'est l'image de l'application

$$\coprod_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \mathcal{B}^n \to \mathfrak{P}(Y),\ (B_1, \ldots, B_n) \mapsto Y \setminus f(X \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_n)),$$

dont la domaine est dénombrable (car c'est une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables). Maintenant, si $V \subseteq Y$ est un ouvert quelconque et $y \in V$, la préimage $f^{-1}y \subseteq X$ est fermée, donc compacte. Parce que $f^{-1}y \subseteq f^{-1}V$, on trouve $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$ tels que

$$f^{-1}y \ \subseteq \ U := B_1 \cup \ldots \cup B_n \ \subseteq \ f^{-1}V.$$

En prenant des compléments, on a

$$X \setminus f^{-1}y = f^{-1}(Y \setminus \{y\}) \supseteq X \setminus U \supseteq X \setminus f^{-1}V = f^{-1}(Y \setminus V).$$

Par la surjectivité de f (ce qui veut dire $M = ff^{-1}M$ pour tout $M \subseteq Y$) on trouve

$$Y \setminus \{y\} = ff^{-1}(Y \setminus \{y\}) \supseteq f(X \setminus U) \supseteq ff^{-1}(Y \setminus V) = Y \setminus V$$

et donc

$$y \in Y \setminus f(X \setminus U) \subseteq V.$$

Ad (b): Soit $V \subseteq Y$ ouvert et $C \subseteq V$ une composante connexe de V. Il faut montrer que $C \subseteq Y$ est ouvert; i.e. que $f^{-1}C \subseteq X$ est ouvert (f est un quotient). Mais $f^{-1}C \subseteq f^{-1}V$ est une réunion de composantes connexes de $f^{-1}V$ (cf. le lemme) qui sont tous ouverts.

Ad (c): Soit X un espace de Hausdorff pour qu'il existe une application continue, surjective et fermée $q\colon I \twoheadrightarrow X$. Il est clairement connexe et compact, car il est l'image de I par une application continue. De plus, par (a), X possède une base dénombrable. Finalement, q est un quotient. À savoir, si $A \subseteq X$ est tel que $q^{-1}A \subseteq I$ est fermé, alors, en utilisant la surjectivité et la fermeture de q, l'ensemble $A = qq^{-1}A \subseteq X$ est fermé X. Donc, finalement, par le point (b), X est localement connexe. □

Lemme. Si $f\colon X \to Y$ est une surjection continue et $C \subseteq Y$ une composante connexe, alors $f^{-1}C$ est une réunion de composantes connexes de X.

Preuve. Si $B \subseteq X$ est une composante connexe qui intersecte $f^{-1}C$, alors $C \cup fB \subseteq Y$ est connexe parce que C, fB le sont et $C \cap fB = ff^{-1}C \cap fB \supseteq f(f^{-1}C \cap B) \neq \varnothing$. Par la maximalité de C, on conclut que $C \cup fB = C$ et donc $B \subseteq f^{-1}C$. $\square$

Remarque. La réciproque de (c) est vraie aussi et connu comme le *théorème de Hahn-Mazurkiewicz*.