TOPOLOGIE - SÉRIE 20

Exercice 1. Vrai ou faux? Un quotient d'un espace T_1 est T_1. Un quotient d'un espace compact est compact.

Preuve. Soit $X := \mathbb{R}$, et on définit sur X la relation d'équivalence suivante:

$$x \sim y \iff x, y \in (0,1] \text{ ou } x = y.$$

On note $X/\sim$ l'espace topologique quotient. On a que X est normal (parce qu'il est métrisable), mais $X/\sim$ ne satisfait pas l'axiome T_1. En fait, chaque voisinage de $[0]$ doit intersecter $[1]$.

Par contre tout espace topologique quotient d'un espace compact est compact aussi, parce qu'il est l'image par une application continue d'un espace compact. □

Exercice 2. La *suspension* d'un espace $X \neq \varnothing$ est $\Sigma X := (X \times I)/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence, engendrée par $(x,0) \sim (y,0)$ et $(x,1) \sim (y,1)$ pour x, $y \in X$ (faire un dessin!). Démontrer que $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve. Montrons que $\Sigma S^{n-1} \cong S^n$ en considérant la projection du cylindre $S^{n-1} \times I$ qui déplace tout point vers le axe des x_{n+1} jusqu'à ce qu'il est situé sur S^n:

$$p \colon S^{n-1} \times I \to S^n,\ ((x_1, \ldots, x_n), t) \mapsto \left(x_1\sqrt{1-t^2}, \ldots, x_n\sqrt{1-t^2}, t\right).$$

Cette projection est bien définie, car $\|p(x,t)\| = \sqrt{(1-t^2)\,\|x\|^2 + t^2} = \sqrt{(1-t^2)+t^2} = 1$. De plus, p est continue et constante sur $S^{n-1} \times \{-1\}$ et $S^{n-1} \times \{1\}$ et donc factorise uniquement par q comme $p = \bar{p} \circ q$ avec $\bar{p}$ continue. Clairement, $\bar{p}$ est bijective et parce que la suspension ΣS^{n-1} est l'image du compact $S^{n-1} \times I$ par q, elle aussi compacte. Finalement, S^n est de Hausdorff, ce qui implique que $\bar{p}$ est un homéomorphisme. □

Exercice 3. **(Espace projectif)** L'espace projectif réel de dimension $n \in \mathbb{N}$ est

$$\mathbb{RP}^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim \qquad \text{où} \qquad x \sim y \ \Leftrightarrow\ \mathbb{R}x = \mathbb{R}y.$$

Ça veut dire $\mathbb{RP}^n$ est l'espace des droites par l'origine dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que

(a) Chaque $\mathbb{RP}^n$ est compact de Hausdorff et $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$.
(b) Il y a un recouvrement ouvert $\{U_1, \ldots, U_{n+1}\}$ de $\mathbb{RP}^n$ où tout U_i est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. *Indication: U_i est l'image de $V_i := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i = 1\}$ dans $\mathbb{RP}^n$.*
(c) Les compléments des U_i sont homéomorphes à $\mathbb{RP}^{n-1}$.
(d) $\mathbb{RP}^n/\mathbb{RP}^{n-1} \cong S^n$ où $\mathbb{RP}^{n-1} \cong \mathbb{RP}^n \setminus U_i \subseteq \mathbb{RP}^n$ pour un $i \in 1, \ldots, n+1$.

Preuve. *Ad (a):* En fait, $\mathbb{RP}^n$ est un quotient de S^n où la projection est

$$q \colon S^n \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^n,\ x \mapsto [x]$$

(c'est la restriction de la projection $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^n$). Donc $\mathbb{RP}^n$ est l'image d'un espace compact par une application continue. Pour la propriété de Hausdorff, on représente $[x]$, $[y] \in \mathbb{RP}^n$ avec $[x] \neq [y]$ par deux points x, $y \in S^n$ sur la sphère. L'idée maintenant est de séparer x et y par deux ouverts U et V sur la sphère et après séparer les droites $[x] = \mathbb{R}^\times x$ et $[y] = \mathbb{R}^\times y$ par

Date: 14 mai 2014

les cônes correspondants, mais il faut que l'on paye attention que V ne contient pas de point antipodal de U. Plus formellement, on choisit ε_1, δ_1, ε_2, $\delta_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ tels que

$$B(x,\varepsilon_1) \cap B(y,\delta_1) = B(x,\varepsilon_2) \cap B(-y,\varepsilon_2) = \varnothing.$$

En posant, $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, $U := B(x,\varepsilon)$ et $V := B(y,\delta)$, il suit que $U \cap V = U \cap -V = \varnothing$ et donc les cônes $[U] = \{[u] \in \mathbb{RP}^n \mid u \in U\}$ et $[V]$ sont aussi disjoints. De plus, en notant $p\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^n$ l'application quotient, ils sont ouverts, car $p^{-1}[U] = \mathbb{R}^\times U$, ce qui correspond à $\mathbb{R}^\times \times U$ sous l'homéomorphisme

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^\times \times S^n,\, p \mapsto \left(\|p\|, \frac{p}{\|p\|}\right),\, \lambda \cdot p \leftarrow\!\shortmid (\lambda, p).$$

Finalement, $\mathbb{RP}^1 \cong S^1 \subseteq \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ parce que la composition

$$S^1 \to S^1 \xrightarrow{q} \mathbb{RP}^1,\, z \mapsto z^2 \mapsto [z^2]$$

est continue, bijectif (parce que $q^{-1}[z] = \{\pm z\}$), S^1 est compact et $\mathbb{RP}^1$ de Hausdorff.

Ad (b): Avec V_i comme dans l'indication et $U_i := pV_i$ (où $p\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^n$ est l'application quotient), les U_i recouvrent $\mathbb{RP}^n$ parce que si $[x] = [x_1, \ldots, x_{n+1}] \in \mathbb{RP}^n$, il existe $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ tel que $x_i \neq 0$ et $[x] = [x/x_i] \in U_i$. Ils sont ouverts parce que

$$p^{-1}U_i = p^{-1}pV_i = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}^\times} \lambda V_i = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, x_i = 0\right\} = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathrm{pr}_i^{-1}\{0\}.$$

Il reste à montrer que $U_i \cong \mathbb{R}^n$. Mais la restriction de p

$$f\colon V_i \to U_i,\, x \mapsto [x]$$

est clairement continue et surjectif. Elle est aussi injectif, car si $[x] = [y]$ pour x, $y \in V_i$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ tel que $y = \lambda x$ et en particulier $1 = y_i = \lambda x_i = \lambda$. Finalement, elle est ouverte, car si $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ et $x \in V_i$ on a

$$p^{-1}f(B(x,\varepsilon) \cap V_i) = \mathbb{R}^\times(B(x,\varepsilon) \cap V_i) = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}^\times} \lambda B(x,\varepsilon) = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}^\times} B(\lambda x, |\lambda|\,\varepsilon).$$

Donc f est un homéomorphisme $\mathbb{R}^n \cong V_i \cong U_i$.

Ad (c): Clairement $\mathbb{RP}^n \setminus U_i = \{[x] \in \mathbb{RP}^n \mid x_i = 0\} = pP_i$ où $P_i := \mathrm{pr}_i^{-1}\{0\}$ est le hyperplan des $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ avec $x_i = 0$. Mais $P_i \cong \mathbb{R}^n$ et la restriction de la relation d'équivalence $\sim$ à P_i est la relation correspondante sur $\mathbb{R}^n$. Donc $pP_i \cong \mathbb{R}^n/\!\sim\, = \mathbb{RP}^{n-1}$.

Ad (d): On va supposer que $U_i = U_1$, les autres cas sont analogues. Intuitivement

$$\mathbb{RP}^n/\mathbb{RP}^{n-1} = \mathbb{RP}^n/(\mathbb{RP}^n \setminus U_1) = (U_1 \cup (\mathbb{RR}^n \setminus U_1))/(\mathbb{RP}^n \setminus U_1) \cong U_1 \cup \{\infty\} \cong \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$$

(où ∞ est la classe d'équivalence de $\mathbb{RP}^n \setminus U_1$) est le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}^n$ (cf. série 13, exercice 3) et il faut juste montrer que la topologie sur $\mathbb{RP}^n/\mathbb{RP}^{n-1}$ est celle du compactifié. Ça veut dire que pour tout $V \subseteq \mathbb{RP}^n$ avec $\mathbb{RP}^n \setminus U_1 \subseteq V$, il faut monter que $V \subseteq \mathbb{RP}^n$ est ouvert ssi $U_1 \setminus V \subseteq U_1$ est fermé (dans U_1!) et compact. Mais $\mathbb{RP}^n \setminus V = U_1 \setminus V$ parce que $\mathbb{RP}^n \setminus V \subseteq U_1$ par hypothèse. Alors si $V \subseteq \mathbb{RP}^n$ est ouvert, $\mathbb{RP}^n \setminus V = U_1 \setminus V$ est fermé et donc compact parce que $\mathbb{RP}^n$ est compact. Par contre, si $U_1 \setminus V \subseteq U_1$ est fermé (dans U_1) et compact $U_1 \setminus V = \mathbb{RP}^n \setminus V$ doit aussi être fermé dans $\mathbb{RP}^n$ parce qu'un compact dans un espace de Hausdorff doit être fermé. $\square$

Exercice 4. Soient X, Y deux espaces topologiques et $A \subseteq X$ fermé. Pour toute application continue $f\colon A \to Y$, on définit

$$X \amalg_f Y := (X \amalg Y)/{\sim} \qquad \text{où } \sim \text{ est engendrée par } a \sim f(a)\ \forall a \in A.$$

On dit alors que X a été *attaché* à Y via f, qui est *l'application d'attachement*. En écrivant $q\colon X \amalg Y \to X \amalg_f Y$ pour l'application quotient, montrer que

(a) la restriction $q|_Y\colon Y \to X \amalg_f Y$ est un plongement fermé;

(b) la restriction $q|_{X\setminus A}\colon X \setminus A \to X \amalg_f Y$ est un plongement ouvert;

(c) $(X \amalg_f Y)/Y \cong X/A$.

Preuve. Ad (a): La continuité est claire, car $q|_Y$ est la restriction d'une application continue. Aussi, $q|_Y$ est injective, car si $y \sim y'$ pour y, $y' \in Y$, il y a un $x \in X$ tel que $y = fx = y'$. Finalement, qY est fermé parce que

$$q^{-1}qY = A \amalg Y \subseteq X \amalg Y \qquad \text{est fermé.}$$

Ad (b): Continuité et injectivité sont claires et $q(X \setminus A)$ et ouvert parce que

$$q^{-1}q(X \setminus A) = X \setminus A \subseteq X \subseteq X \amalg Y \qquad \text{est ouvert.}$$

Ad (c): En écrivant $p\colon X \twoheadrightarrow X/A$ et $r\colon X \amalg_f Y \twoheadrightarrow (X \amalg_f Y)/Y$ pour les applications quotient, la composée

$$X \xrightarrow{q|_X} X \amalg_f Y \overset{r}{\twoheadrightarrow} (X \amalg_f Y)/Y \qquad \text{factorise uniquement par } p,$$

disons $r \circ q|_X = g \circ p$ où $g\colon X/A \to (X \amalg_f Y)/Y$ est continue. Par contre, l'application continue

$$h\colon X \amalg Y \to X/A,\ x \mapsto [x],\ y \mapsto [A] \quad \text{(la classe d'équivalence de } A\text{)}$$

factorise uniquement par q (car $ha = hfa = [A]$ pour tout $a \in A$) et même par $r \circ q$ (car h est constante sur Y), disons $h = \bar{h} \circ r \circ q$ ce qui nous donne l'inverse de g.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads, "p"'] & X \amalg Y \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[dl, "h"] & X \amalg_f Y \arrow[r, two heads, "r"] & (X \amalg_f Y)/Y \arrow[dlll, dotted, bend left, "\bar{h}"] \\
X/A \arrow[urrr, dotted, bend right, "g"'] & & &
\end{tikzcd}$$

En fait, pour $x \in X$ on a $\bar{h}gpx = \bar{h}rqx = hx = px$. Parce que p factorise uniquement par p comme $p = \mathrm{id}_{X/A} \circ p$ on obtient $\bar{h} \circ g = \mathrm{id}_{X/A}$. Similairement pour $g \circ \bar{h}$. $\square$