TOPOLOGIE - SÉRIE 18

Définition. Un sous-ensemble d'un espace topologique est G_δ ssi on peut l'écrire comme une intersection dénombrable d'ouverts.

Exercice 1. Dans un espace normal X, montrer qu'un fermé $A \subseteq X$ est G_δ si et seulement s'il existe $f\colon X \to I$ continue tel que $fA \subseteq \{0\}$ et $f(X \setminus A) \subseteq]0,1]$. Conclure que pour deux fermés A, $B \subseteq X$ disjoints qui sont G_δ, il existe $f\colon X \to I$ tel que $A = f^{-1}\{0\}$ et $B = f^{-1}\{1\}$.
Indication: Pour l'implication "$\Rightarrow$", écrire $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ (où chaque U_n est ouvert) et choisir des applications d'Urysohn f_n pour A et $X \setminus U_n$.

Preuve. Soit $A \subseteq X$ un fermé G_δ. Alors il existe une collection $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'ouverts de X telle que $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_n$. Par le lemme de Urysohn, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction $f_n\colon X \to I$ telle que $f_n(x) = 0\ \forall x \in A$ et $f_n(x) = 1\ \forall x \in X \setminus U_n$ (car $X \setminus U_n$ est fermé pour tout $n \in \mathbb{N}^*$). On pose alors $f\colon X \to I$, définie par

$$f(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{f_n(x)}{2^n}.$$

Cette fonction est bien définie parce que

$$0 \leqslant f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{f_n(x)}{2^n} \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Elle est continue parce que la série converge uniformément par le critère de Weierstrass (le "M-test"). Alors on a $x \in A \Leftrightarrow f_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow f(x) = 0$ (car $f(x)$ est une somme de termes positifs). Donc $f(A) \subseteq \{0\}$ et $f(X \setminus A) \subseteq]0,1]$.

Pour la réciproque, supposons qu'il existe une fonction f comme dans l'énoncé. Comme $f(A) \subseteq \{0\}$ et $f(X \setminus A) \subseteq]0,1]$, on a $f(A) = \{0\}$ (sauf si $A = \varnothing$, où le résultat est trivial), donc

$$A = f^{-1}(\{0\}) = f^{-1}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0, \frac{1}{n}\right[\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{n}\right[\right),$$

ce qui est bien une intersection dénombrable d'ouverts de X car f est continue et les $\left[0, \frac{1}{n}\right[$ sont des ouverts dans I. Donc A est bien G_δ.

Maintenant, soient $A, B \subseteq X$ deux fermés et disjoints qui sont G_δ. Alors par ce qu'on vient de montrer on a l'existence de deux fonctions f, $g\colon X \to I$ telles que $A = f^{-1}(0)$, $B = g^{-1}(1)$ et par Urysohn, il existe $h\colon X \to I$ avec $h(A) \subseteq \{0\}$ et $h(B) \subseteq \{1\}$. Maintenant, on définit $F\colon X \to I$ par

$$F(x) := \frac{\max\{f(x), h(x)\} + \min\{g(x), h(x)\}}{2}.$$

Cette fonction est continue et bien définie (car $f + g \neq 0$ vu que $A \cap B = \varnothing$). De plus, on voit facilement que $A = f^{-1}(0)$ et $B = f^{-1}(1)$. □

Exercice 2. (Compactifié de Stone-Čech) Pour un espace topologique X, on note $C(X, I)$ l'ensemble des applications continues $X \to I$ et on considère

$$h_X\colon X \to I^{C(X,I)},\ x \mapsto (fx)_{f\in C(X,I)}.$$

Le *compactifié de Stone-Čech* de X est $\beta X := \overline{h_X X}$, ce qui est compact par le théorème de Tychonoff. En notant $\eta_X\colon X \to \beta X$ l'application induite par h_X, montrer que

Date: 14 mai 2014

(a) X est complètement régulier ssi η_X (ou h_X) est un plongement;
Indication: Un sous-espace d'un espace complètement régulier est complètement régulier.

(b) pour $f\colon X \to Y$ continue, il existe une unique application continue $\beta f\colon \beta X \to \beta Y$ telle que $\beta f \circ \eta_X = \eta_X \circ f$;
Indication: Pour l'unicité, il faut se souvenir que βY est de Hausdorff et que deux applications continues vers un espace de Hausdorff coïncident, s'ils coïncident sur un sous-ensemble dense.

(c) si X est compact de Hausdorff, alors η_X est un isomorphisme;

(d) si K est compact de Hausdorff et $f\colon X \to K$ continue, il existe une unique application continue $f^\flat\colon \beta X \to K$ telle que $f^\flat \circ \eta_X = f$.

(a) [$\Longrightarrow$]; On va montrer que $h := h_X$ est un plongement, lorsque X est complètement régulier. Pour l'injectivité, considérons deux points différents x et y. Comme X est d'Hausdorff, le singleton $\{y\}$ est fermé. Maintenant on peut séparer x et $\{y\}$ par une fonction continue $f\colon X \to I$ telle que $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$. Alors on a que

$$h(x)(f) = f(x) = 0 \neq 1 = f(y) = h(y)(f),$$

ce qui montre que $h(x) \neq h(y)$. Ensuite il faut montrer que $h\colon X \to h(X)$ est ouverte. Soit $U \subseteq X$ un ouvert, et $x \in U$. Comme X est complètement régulier, on peut séparer x et $X \setminus U$ par une application continue $f\colon X \to I$ telle que $f(x) = 1$ et $f(y) = 0$ pour tout $y \in X \setminus U$. On a que

$$h(x) \in \mathrm{pr}_f^{-1}(]0,1]) \cap h(X) \subseteq h(U).$$

Comme $\mathrm{pr}_f^{-1}(]0,1])$ est ouvert, il suit que $h(U)$ est ouvert dans $h(X)$.

[$\Longleftarrow$]; On remarque que $I^{C(X,I)}$ est compact et de Hausdorff, comme I l'est, et donc il est normal et complètement régulier. X est homéomorphe à $h(X)$, ce qui est un sous-espace du complètement régulier $I^{C(X,I)}$, donc il l'est aussi.

On va montrer qu'un sous-espace Z d'un espace complètement régulier Y l'est aussi. Soit $z \in Z$ et $F = A \cap Z$ un fermé de Z, avec A fermé dans A et tel que $z \notin F$. Alors $z \notin F$, et on peut les séparer par une application continue $f : Y \longrightarrow I$ tel que $f(z) = 1$ et $f(w) = 0$ pour $w \in A$. La restriction $f|_Z$ alors sépare z et F.

(b) Soit $f\colon X \to Y$ une application continue. On définit $\beta f\colon \beta X \to \beta Y$ par

$$\beta f(F)\colon g \mapsto F(g \circ f).$$

L'application βf est continue parce que pour n'importe quel $g \in C(Y, I)$, $]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ et $F \in I^{C(X,I)}$, si $\beta f(F)$ appartient à $\mathrm{pr}_g^{-1}(]a, b[)$, alors F appartient à $\mathrm{pr}_{g\circ f}^{-1}(]a, b[)$, et

$$\beta f(\mathrm{pr}_{g\circ f}^{-1}(]a, b[)) \subseteq \mathrm{pr}_g^{-1}(]a, b[)$$

Ensuite, pour $a \in X$ et $g \in C(Y, I)$ on a que

$$(\beta f \circ \eta_X(x))(g) = (\beta f(h(x)))(g)$$

$$= h(x)(g \circ f) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = h(f(x))(g) = ((\eta_Y \circ f)(x))(g).$$

On a bien montré que $\beta f \circ \eta_X(x) = \eta_Y \circ f(x)$, et donc $\beta f \circ \eta_X = \eta_Y \circ f$.

(c) Lorsque X est compact et de Hausdorff, il est complètement régulier, et donc $h(X)$ est homéomorphe à X, ce qui est compact. Mais alors $h(X)$ est un sous-espace compact dans l'espace de Hausdorff $I^{C(X,I)}$, et donc il est fermé. Ca veut dire que X est homéomorphe à $\beta X = h(X)$ par le plongement η_X.

(d) Pour tout $f : X \longrightarrow K$ tel que K est compact de Hausdorff, on peut définir $f^b := \eta_K^{-1} \circ \beta f$. Une telle application est continue et ensuite

$$f^b \circ \eta_X = \eta_K^{-1} \circ \beta f \circ \eta_X = \eta_K^{-1} \circ \eta_K \circ f = f.$$

Une telle définition est obligatoire. En fait, par l'unicité du point (b), si f^b satisfait $f^b \circ \eta_X = f$, alors $\eta_K \circ f^b \circ \eta_X = \eta_K \circ f$, et donc $\beta f = \eta_K \circ f^b$.

Définition. Le *support* d'une application $f\colon X \to \mathbb{R}$ (où X est un espace topologique) est

$$\operatorname{supp} f := \overline{f^{-1}\mathbb{R}^\times} = \overline{\{x \in X \mid fx \neq 0\}}.$$

Une *partition d'unité* sur X est une famille d'applications $(\varphi_j\colon X \to I)_{j\in J}$, telle que $(\operatorname{supp} \varphi_j)_{j\in J}$ est localement fini (i.e. tout $x \in X$ admet un voisinage U tel que $\{j \in J \mid U \cap \operatorname{supp} \varphi_j \neq \varnothing\}$ est fini) et $\sum_{j\in J} \varphi_j x = 1$ pour tous $x \in X$ (cette somme est finie par la première condition). Si, pour une telle partition d'unité, $(U_j)_{j\in J}$ est un recouvrement de X on dit que $(\varphi_j)_{j\in J}$ est *subordonnée* à $(U_j)_{j\in J}$ ssi $\operatorname{supp} \varphi_j \subseteq U_j$ pour tout $j \in J$. Finalement, si pour un recouvrement $(U_j)_{j\in J}$ il existe une partition d'unité subordonnée à $(U_j)_{j\in J}$ on dit qu'il est *numérable*.

Exercice 3. Soit X un espace paracompact de Hausdorff. Montrer que

(a) si $(U_j)_{j\in J}$ est un recouvrement ouvert de X, il existe un recouvrement ouvert localement fini $(V_j)_{j\in J}$ tel que $\overline{V}_j \subseteq U_j$ pour tout $j \in J$;

(b) un recouvrement $(U_j)_{j\in J}$ est numérable s'il existe une famille $(\varphi_j\colon X \to I)_{j\in J}$ d'applications continues, telle que $(\operatorname{supp} \varphi_j)_{j\in J}$ est localement fini, $\operatorname{supp} \varphi_j \subseteq U_j$ pour tout $j \in J$ et $\sum_{j\in J} \varphi_j\colon X \to \mathbb{R}$ est strictement positive;

(c) chaque recouvrement ouvert de X est numérable.
Indication: Utiliser (a) pour trouver deux recouvrements ouverts localement finis $(V_j)_{j\in J}$, $(W_j)_{j\in J}$ tels que $\overline{W}_j \subseteq V_j \subseteq \overline{V}_j \subseteq U_j$ pour tout $j \in J$ et utiliser le lemme d'Urysohn.

Preuve.

(a) D'abord on utilise la régularité de X (X est en effet normal comme il est paracompact et d'Hausdorff), et pour tout $x \in X$ et $i \in I$ on choisit un ouvert $V_{x,i}$ tel que $x \in V_{x,i} \subseteq \overline{V}_{x,i} \subseteq U_i$. Ensuite, on peut raffiner $(V_{x,i})_{x,i}$ en un recouvrement localement fini $\mathcal{V}$, ce qui est equippé d'une fonction $V \mapsto (x(V), i(V))$, tel que $V \subseteq V_{x(V),i(V)}$ pour tout $V \in \mathcal{V}$. Finalement, on définit

$$V_i := \bigcup \{V \in \mathcal{V} \mid i(V) = i\}.$$

Comme $\bigcup_{i\in I} V_i = \bigcup \mathcal{V} = X$, la famille $(V_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de X. Il est localement fini puisque $\mathcal{V}$ l'est; ensuite, grâce à la finitude locale de $\mathcal{V}$, on a

$$\overline{V}_i = \overline{\bigcup \{V \in \mathcal{V} \mid i(V) = i\}} = \bigcup \left\{\overline{V} \in \mathcal{V} \;\middle|\; i(V) = i\right\} \subseteq \bigcup_{x\in U_{i(V)}} \overline{V_{x,i(V)}} \subseteq U_{i(V)}.$$

(b) Supposons que $(U_j)_{j\in J}$ est un recouvrement tel qu'il existe une famille de fonctions $(\varphi_j\colon X \to I)_{j\in J}$ avec $\mathrm{supp}(\varphi_j) \subseteq U_j$ pour tout $j \in J$, $\big(\mathrm{supp}(\varphi_j)\big)_{j\in J}$ localement fini, et la somme strictement positive. Alors en définissant

$$\varphi_j' := \frac{\varphi_j}{\sum_{i\in J}\varphi_i}$$

on obtient un fonction bien definie et continue $\varphi_j' : X \to \mathbb{R}$ (grace à la condition sur les supports). Ensuite, c'est facile à voir que $\sum_{i\in I}\varphi_i'(x) = 1$ pour n'importe quel $x \in X$. Par conséquent, pour tout $j \in J$ on a $0 \le \varphi_j' \le \sum_{i\in J}\varphi_i' = 1$, et donc on peut considérer chaque φ_j' comme une fonction $\varphi_j'\colon X \to I$. En particulier, une telle famille $(\varphi_j')_{j\in J}$ est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_j)_{j\in J}$, ce qui est donc numérable.

(c) En appliquant le point (a) deux fois, on trouve des recouvrements localement finis $(V_j)_{j\in J}$ et $(W_j)_{j\in J}$ tels que $\overline{V}_j \subseteq W_j \subseteq \overline{W}_j \subseteq U_j$ pour tout $j \in J$. Comme X est normal, on peut utiliser le Lemme d'Uryshon pour avoir pour tout $j \in J$ une function $\varphi_j : X \to I$ telle que $\varphi_j\overline{V}_j \subseteq \{1\}$ et $\varphi_j(X \setminus W_j) \subseteq \{0\}$. Alors $\mathrm{supp}\,\varphi_j \subseteq \overline{W}_j \subseteq U_j$ et $(\mathrm{supp}\,\varphi_j)_{j\in J}$ et localement fini parce que $(\overline{W}_j)_{j\in J}$ l'est. Finalement, tout $x \in X$ appartient à quelque V_{j_0}, et donc on a que $\sum_{j\in J}\varphi_j x \ge \varphi_{j_0}x = 1 > 0$. En utilisant le point (b) on peut conclure.