TOPOLOGIE - SÉRIE 17

Exercice 1. Montrer que

(a) $\mathbb{R}_K$ n'est pas régulier;

(b) $\mathbb{R}_l$ est normal;

(c) $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ est régulier.

Preuve. Ad (a): Par définition de la topologie sur $\mathbb{R}_K$, l'ensemble

$$K := \{1/n \in \mathbb{R}_K \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$$

est fermé et on ne peut pas séparer 0 et K. En fait, si U, $V \subseteq \mathbb{R}_K$ sont ouverts avec $0 \in U$ et $K \subseteq V$ il y a a, $b \in \mathbb{R}_K$ tels que $0 \in \,]a,b[\, \setminus K \subseteq U$. De plus, il y a $n \in \mathbb{N}_{>0}$ avec $1/n < b$ et comme $1/n \in K$ on trouve a', $b' \in \mathbb{R}_K$ tels que $1/n \in \,]a',b'[\, \subseteq V$. Mais maintenant

$$\varnothing \neq (]a,b[\setminus K) \cap \,]a',b'[\, \subseteq U \cap V.$$

Ad (b): Deux A, $B \subseteq \mathbb{R}_l$ fermés et disjoints peuvent être séparés par

$$A \subseteq U := \bigcup_{a\in A} \bigcup_{x \in X_a} [a,x[\qquad \text{et} \qquad B \subseteq V := \bigcup_{b\in B} \bigcup_{y \in Y_b} [b,y[$$

où $X_a := \{x \in X \mid [a,x[\cap B = \varnothing\}$ et $Y_b := \{y \in X \mid [b,y[\cap A = \varnothing\}$ (pour $a \in A$ et $b \in B$), qui sont clairement non vides, car A et B sont fermés et disjoints. Les ensembles U et V sont disjoints, parce que si on suppose que l'on a $z \in U \cap V$, il y a $a \in A$, $x \in X_a$, $b \in B$ et $y \in Y_b$ tels que $z \in [a,x[\cap [b,y[$. Donc $b < x$ (i.e. $b \in [a,x[$), ce qui contredit la définition de X_a.
Ad (c): L'espace $\mathbb{R}_l$ est normal (en particulier régulier) et un produit d'espaces réguliers est régulier. □

Exercice 2. Soit X un espace topologique.

(a) Si X est de Hausdorff, on sait qu'un sous-espace compact $A \subseteq X$ est forcément fermé. Est-ce que c'est aussi vrai pour A paracompact?

(b) Si X est paracompact et $A \subseteq X$ fermé, alors A est paracompact aussi.

(c) **(Dieudonné)** Un espace paracompact et de Hausdorff est normal.
Indication: D'abord montrer la régularité.

(a) Non, en effet il suffit de considérer $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{st})$ (qui est bien de Hausdorff) et un sous-ensemble ouvert $]a,b[\subseteq \mathbb{R}$, avec $a,b \in \mathbb{R}$. Alors $(]a,b[, (\mathcal{T}_{st})_{]a,b[})$ est un espace métrique. Par le théorème de Stone (exercice 4, série 16) on conclut que $(]a,b[, (\mathcal{T}_{st})_{]a,b[})$ est paracompact, mais il n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$.

(b) *Preuve.* Soit $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}_A$ (où $\mathcal{T}$ est la topologie de X) un recouvrement ouvert de A (i.e. $A \subseteq \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$). Par définition de la topologie du sous-espace on sait que pour tout $U \in \mathcal{U}$ il existe $V_U \in \mathcal{T}$ tel que $U = V_U \cap A$. On considère la collection $\mathcal{V} = \{V_U \mid U \in \mathcal{U}\} \cup \{X \setminus A\}$. Comme

$$(1) \quad \left(\bigcup_{U\in\mathcal{U}} V_U\right) \cup (X \setminus A) \supseteq \left(\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U\right) \cup (X \setminus A) \supseteq A \cup (X \setminus A) = X,$$

Date: 2 avril 2014

on conclut que $\mathcal{V}$ est un recouvrement ouvert de X. Comme X est paracompact, il existe un raffinement localement fini $\mathcal{W}$. On considère la collection $\mathcal{O} = \{W \cap A \mid W \in \mathcal{W}\} \subseteq \mathcal{T}_A$. Alors

$$\bigcup_{W \in \mathcal{W}} (W \cap A) = \bigcup_{W \in \mathcal{W}} W \cap A = X \cap A = A,$$

ce qui montre que $\mathcal{O}$ est un recouvrement ouvert de A. On va montrer maintenant que $\mathcal{O}$ est un raffinement localement fini de $\mathcal{U}$.

Raffinement: Soit $O \in \mathcal{O}$, alors $O = W \cap A$ pour un certain $W \in \mathcal{W}$. Comme $\mathcal{W}$ est un raffinement de $\mathcal{V}$, il existe un $U \in \mathcal{U}$ tel que $W \subseteq V_U$. Donc on a $O = W \cap A \subseteq V_U \cap A = U \in \mathcal{U}$, ce qui montre que $\mathcal{O}$ est bien un raffinement de $\mathcal{U}$.

Localement fini: Soit $a \in A \subseteq X$. Alors, comme $\mathcal{W}$ est localement fini, il existe un ouvert $U \in \mathcal{T}$ tel que $a \in U$ et U intersecte seulement un nombre fini de $W \in \mathcal{W}$. Alors $a \in U \cap A \in \mathcal{T}_A$ est tel qu'il intersecte seulement un nombre fini d'ouverts de $\mathcal{O}$, ce qui montre que $\mathcal{O}$ est localement fini.

(c) *Preuve.* Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace paracompact et de Hausdorff.

- On va d'abord prouver que X est régulier. Soit $x \in X$, et $A \subseteq X$ fermé tel que $x \notin A$. Comme X est de Hausdorff, pour tout $y \in A$ ils existent des ouverts $U_y, V_y \in \mathcal{T}$ t.q. $x \in U_y, y \in V_y$ et $U_y \cap V_y = \varnothing$. Alors $A \subseteq \bigcup_{y \in A} V_y$, et donc, par un calcul analogue à (**??**), on conclut que $\mathcal{V} = \{V_y \mid y \in A\} \cup \{X \setminus A\}$ est un recouvrement ouvert de X. Comme X est paracompact, il existe un raffinement localement fini $\mathcal{W}$. On enlève à $\mathcal{W}$ tout ensemble qui n'intersecte pas A et on obtient une collection $\mathcal{O}$ localement finie telle que tout $O \in \mathcal{O}$ est contenu dans un $V_y \in \mathcal{V}$. Comme $\mathcal{O}$ est localement fini, il existe un ouvert $W \in \mathcal{T}$ tel que $x \in W$ et W intersecte seulement un nombre fini d'éléments de $\mathcal{O}$. Soit maintenant $T \subseteq A$ un sous-ensemble fini de A qui contient pour chaque $O \in \mathcal{O}$ un y tel que $O \subseteq V_y$. on pose alors

$$U = W \cap \bigcap_{y \in T} U_y, \text{ et } V = \bigcup_{O \in \mathcal{O}} O.$$

Alors $x \in U$, $A \subseteq V$ et $U \cap V = \varnothing$. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe un $z \in U \cap V$. Comme $z \in V$, il existe un $O \in \mathcal{O}$ tel que $z \in O$. De plus, comme $z \in U$, on sait que $z \in U_y$ pour tout $y \in A$. Mais comme il existe un $y \in A$ tel que $O \subseteq V_y$, on conclut que $z \in V_y \cap U_y = \varnothing$, ce qui est un contradiction.

- On montre maintenant la normalité. Soient $A, B \subseteq X$ des ensembles fermés dans X. Comme X est régulier par le point précédent, pour tout $a \in A$ ils existent des ouverts $U_a, V_a \in \mathcal{T}$ t.q. $a \in U_a$, $B \subseteq V_a$ et $U_a \cap V_a = \varnothing$. La collection $\mathcal{U} = \{U_a \cap A \mid a \in A\}$ est un recouvrement ouvert de A. On pose alors $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cup \{X \setminus A\}$ qui est un recouvrement ouvert de X par un calcul analogue à (**??**). Comme X est paracompact, il existe un raffinement localement fini $\mathcal{W}$. Encore une fois, on enlève à $\mathcal{W}$ tous les ensembles qui n'intersectent pas A, et on obtient une collection localement finie d'ouverts $\mathcal{O}$, chacun contenu dans un certain U_a, qui recouvre A. On pose alors

$$C = \bigcup_{O \in \mathcal{O}} O \in \mathcal{T}.$$

Comme $\mathcal{O}$ est localement finie, pour tout $b \in B$, il existe un ouvert $W_b \in \mathcal{T}$ tel que $b \in W_b$ qui intersecte seulement un nombre fini d'éléments de $\mathcal{O}$. Soit $T \subseteq A$ un sous ensemble fini de A qui contient pour tout $O \in \mathcal{O}$ un point a tel que $O \in U_a$. Alors on définit l'ouvert

$$Q_b = W_b \cap \bigcap_{a \in T} V_a \in \mathcal{T}.$$

Cet ouvert n'intersecte pas C par un raisonnement analogue à la fin de la preuve de la régularité. Il suffit donc de définir

$$Q = \bigcup_{b \in B} Q_b \in \mathcal{T}$$

pour obtenir que $A \subseteq C$, $B \subseteq Q$ et $C \cap Q = \varnothing$.

Définition. Une application continue $f\colon X \to Y$ est appelée *propre* ssi pour tout espace topologique Z, l'application $f \times \mathrm{id}_Z\colon X \times Z \to Y \times Z$, $(x,z) \mapsto (fx, z)$ est fermée. Si de plus, f est surjective, on dit que f est un *quotient propre* ou *parfaite*.

Exercice 3. Pour une application continue $f\colon X \to Y$, montrer que les énoncés suivants sont équivalents:

(a) f est propre;

(b) f est fermée et ses fibres $f^{-1}y$ avec $y \in Y$ sont compactes;

(c) si $\mathcal{F}$ est un filtre sur X et $y \in Y$ un point d'accumulation de $f_*\mathcal{F}$, alors il existe un point d'accumulation $x \in X$ de $\mathcal{F}$ tel que $fx = y$;

(d) si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur X et $y \in Y$ un point limite de $f_*\mathcal{U}$, alors il existe un point limite $x \in X$ de $\mathcal{U}$ tel que $fx = y$.

Indication: Pour "(a) $\Rightarrow$ (b)", montrer que chaque $f\colon f^{-1}y \to \{y\}$ est propre et utiliser l'exercice 4 de la série 14. Pour "(d) $\Rightarrow$ (a)", montrer que si on a une famille d'applications continues $(f_i)_{i\in I}$ dont chacune vérifie (d), alors le produit $\prod_{i \in I} f_i$ vérifie (d) aussi. Ensuite, il suffit de montrer qu'une application qui vérifie (d) est fermée.

Preuve. "*(a) $\Rightarrow$ (b)*": En prenant $Z = \{*\}$ dans la définition, on voit qu'une application propre est fermée. Maintenant, si f est propre et $y \in Y$, on va montrer que $f\colon f^{-1}y \to \{y\}$ est aussi propre et conclure par l'exercice 4 de la série 14. Alors, soit Z un espace et $A \subseteq (f^{-1}y) \times Z$ fermé. Il existe $A' \subseteq X \times Z$ fermé avec $A' \cap ((f^{-1}y) \times Z) = A$ et par propreté de f, $(f \times \mathrm{id}_Z)A' \subseteq Y \times Z$ est fermé. Finalement,

$$\begin{aligned}
(f \times \mathrm{id}_Z)A &= (f \times \mathrm{id}_Z)\Big(A' \cap ((f^{-1}y) \times Z)\Big) = \Big\{(fx, z) \;\Big|\; (x,z) \in A' \cap ((f^{-1}y) \times Z)\Big\} \\
&= \Big\{(fx,z) \;\Big|\; (x,z) \in A' \text{ et } x \in f^{-1}y\Big\} = \{(fx,z) \mid (x,z) \in A' \text{ et } fx = y\} \\
&= ((f \times \mathrm{id}_Z)A') \cap (\{y\} \times Z)
\end{aligned}$$

est fermé dans $\{y\} \times Z$.

"*(b) $\Rightarrow$ (c)*": On se souvient que $f_*\mathcal{F}$ est le filtre engendré par la base de filtre $\{fM \mid M \in \mathcal{F}\}$. Parce que chaque $N \in f_*\mathcal{F}$ contient un fM avec $M \in \mathcal{F}$, les point d'accumulation de $f_*\mathcal{F}$ sont

$$\bigcap_{N \in f_*\mathcal{F}} \overline{N} = \bigcap_{M \in \mathcal{F}} \overline{fM} = \bigcap_{M \in \mathcal{F}} f\overline{M},$$

où, pour la dernière égalité on a utilisé que f est fermée. Maintenant, si $f_*\mathcal{F}$ possède un point d'accumulation $y \in \bigcap_{M \in \mathcal{F}} f\overline{M}$, les $\overline{M} \cap f^{-1}y$ sont non-vides et $\{\overline{M} \cap f^{-1}y \mid M \in \mathcal{F}\}$ est une base de filtre sur $f^{-1}y$. Mais $f^{-1}y$ est compact et donc ce filtre possède un point d'accumulation; i.e. $\bigcap_{M\in\mathcal{F}}(\overline{M}\cap f^{-1}y)$ est non-vide.

"*(c) $\Rightarrow$ (d)*": Triviale.

"*(d) $\Rightarrow$ (a)*": En supposant l'indiction et en observant que f et id_Z (où Z est un espace quelconque) vérifient (d), il suffit de montrer qu'une application continue vérifiant (d) est fermé. Alors soit $f\colon X\to Y$ une application continue qui vérifie (d), $A\subseteq X$ fermé et montrons $fA=\overline{fA}=:B$, où l'inclusion "$\subseteq$" est par la continuité de f. Pour la réciproque, soit $y\in B$, ce qui veut dire que $V\cap fA\neq\varnothing$ pour tout voisinage ouvert $V\in\mathcal{N}(y)$ de y. Donc,

$$\left\{f^{-1}V\;\middle|\;V\in\mathcal{N}(y)\right\}\cup\{A\}$$

engendre un filtre propre que l'on étend en un ultrafiltre $\mathcal{U}$. Mais maintenant, $f_*\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur Y et parce que $\mathcal{N}(y)\subseteq f_*\mathcal{U}$, il converge vers y. Par hypothèse, il existe $x\in f^{-1}y$ avec $\mathcal{U}\to x$. Mais $A\in\mathcal{U}$ et donc $x\in\overline{A}=A$.

Ad "Indication": Soit $(f_i\colon X_i\to Y_i)_{i\in I}$ une famille d'applications où chacune vérifie (d) et soit $f:=\prod_{i\in I}f_i$. Si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur $\prod_{i\in I}X_i$ avec $f_*\mathcal{U}$ convergent vers un $y=(y_i)_{i\in I}$, alors chaque $(\mathrm{pr}_i)_*f_*\mathcal{U}=(f_i)_*(\mathrm{pr}_i)_*\mathcal{U}$ est un ultrafiltre, convergent vers y_i. Par l'hypothèse et l'axiome du choix, on choisit, pour chaque $i\in I$, un $x_i\in X_i$ avec $fx_i=y_i$ et $(\mathrm{pr}_i)_*\mathcal{U}\to x_i$. Mais ça veut exactement dire que $\mathcal{U}\to(x_i)_{i\in I}$ et on conclut. □

Exercice 4. Soit $p\colon X\to Y$ un quotient propre. Montrer que

(a) si X est de Hausdorff/régulier, alors Y l'est aussi;
Indication: Si $g\colon X\to Y$ est continue et fermée, $M\subseteq Y$ et $U\subseteq X$ un voisinage ouvert de $g^{-1}M$, alors il existe un voisinage ouvert V de M avec $g^{-1}V\subseteq U$.

(b) si Y est compact, alors X l'est aussi.

Preuve. Ad (a): Soit y, $y'\in Y$ deux points différents. Par le premier lemme au-dessous on peut séparer $p^{-1}y$ et $p^{-1}y'$ par deux ouverts, disons U et V, et par le deuxième lemme, pU et pV sont des voisinages disjoints de y et y'.
Ad (a'): Soit $U\subseteq Y$ ouvert et $y\in U$ (donc $p^{-1}y\subseteq p^{-1}U$). Par la régularité de X,

$$\left\{V\subseteq X\;\middle|\;V\text{ ouvert et }\overline{V}\subseteq p^{-1}U\right\}$$

est un recouvrement ouvert de $p^{-1}y$ et on peut choisir des ouverts $V_1,\cdots,V_n\subseteq Y$ tels que

$$p^{-1}y\subseteq V:=V_1\cup\cdots\cup V_n\subseteq\overline{V}=\overline{V_1}\cup\cdots\cup\overline{V_n}\subseteq p^{-1}U.$$

Mais alors pV est un voisinage de y et parce que p est fermée

$$y\in pV\subseteq\overline{pV}=p\overline{V}\subseteq pp^{-1}U=U.$$

Ad (b): Note que une composition d'applications fermées est fermée, donc une composition d'applications propres est toujours propre. L'application constante $Y\to\{\star\}$ est la composition suivante:

$$X\xrightarrow{p}Y\longrightarrow\{\star\}\ ,$$

où p est propre par hypothèse et $Y\to\{\star\}$ l'est parce que Y est compacte. Donc elle est propre aussi, et X est compacte. □

Lemme. Tous sous-ensembles compacts et disjoints A, B d'un espace de Hausdorff X peuvent être séparé par des ouverts.

Preuve. Considérons d'abord le cas où $A = \{a\}$. Là, en considérant le recouvrement ouvert

$$\{V \subseteq X \mid V \text{ ouvert et il existe un voisinage ouvert } U \text{ de } a \text{ avec } U \cap V = \varnothing\}$$

de B, on trouve des ouverts $U_1, \cdots, U_n \subseteq X$ et $V_1, \cdots, V_n \subseteq X$ tels que

$$a \in U_1 \cap \cdots \cap U_n =: U, \quad B \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_n =: V \quad \text{et} \quad U_i \cap V_i = \varnothing \text{ pour tous } i.$$

En particulier, $U \cap V = \varnothing$ et on a séparé A et B. Si A n'est pas un singleton, alors en utilisant le cas précédent, on a un recouvrement ouvert de A donné par

$$\{U \subseteq X \mid U \text{ ouvert et il existe un voisinage ouvert } V \text{ de } B \text{ avec } U \cap V = \varnothing\}.$$

Donc, on trouve encore une fois des ouverts $U_1, \cdots, U_n \subseteq X$ et $V_1, \cdots, V_n \subseteq X$ tels que

$$A \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n =: U, \quad B \subseteq V_1 \cap \cdots \cap V_n =: V \quad \text{et} \quad U_i \cap V_i = \varnothing \text{ pour tous } i.$$

En particulier, $U \cap V = \varnothing$ et on a fini. □

Lemme. Soit $p\colon X \to Y$ une application fermée. Si $S \subseteq Y$ et $U \subseteq X$ est un ouvert qui contient $p^{-1}S$, alors il y a aussi un ouvert $V \subseteq Y$ tel que $S \subseteq V$ et $p^{-1}V \subseteq U$. En particulier, si p est surjectif, l'image d'un voisinage de $p^{-1}S$ par p est un voisinage de S.

Preuve. Le sous-ensemble $A := p(X \setminus U) \subseteq Y$ est fermé parce que p est fermée, et donc $V := Y \setminus A$ est ouvert. Maintenant, comme $p^{-1}S \subseteq U$, nous avons que $S \subseteq V$. Ensuite

$$p^{-1}V = p^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus p^{-1}A = X \setminus p^{-1}p(X \setminus U) \subseteq U.$$