TOPOLOGIE - SÉRIE 16

Exercice 1. Montrer que chaque espace métrique compact est séquentiellement compact.

Preuve. Soit X un espace métrique compact et supposons par l'absurde qu'il n'est pas séquentiellement compact, c.à.d. qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que toute sous suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. On a deux cas à considérer:

Cas 1: $\#(x_n)_{n\in\mathbb{N}} < \infty$. Dans ce cas il existe un $x \in X$ tel que $x_n = x$ pour une infinité de $n \in \mathbb{N}$. Mais alors on peut extraire une sous suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenant seulement le point x. Cette sous suite converge donc vers x, ce qui contredit notre hypothèse absurde.

Cas 2: $\#(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \infty$. Pour tout $y \in X$ il existe $r_y > 0$ tel que $\#B(y, r_y) \cap (x_n)_{n\in\mathbb{N}} < \infty$. En effet, si un tel r_y n'existait pas, on pourrait extraire une sous suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers y. On considère alors le recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{B(y, r_y) \mid y \in X\}$. Comme X est compact, ils existent $y_1, \ldots, y_m \in X$ tels que

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} B(y_i, r_{y_i}).$$

Chaque boule dans cette réunion ne contient qu'un nombre fini d'éléments de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donc, comme l'union est finie, X tout entier ne contient qu'un nombre fini d'éléments de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui contredit le fait que $\#(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \infty$. □

Définition. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans un espace X, son filtre associé est le filtre engendré par tout les $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Pour un espace topologique X, montrer que

(a) si $\mathcal{F}$ est un filtre sur X avec un point d'accumulation $x \in X$, alors on peut étendre $\mathcal{F}$ en un ultrafiltre $\mathcal{U}$ qui converge vers x.
Indication: Considérer $\mathcal{N}(x) \cup \mathcal{F}$.

(b) un point $x \in X$ est un point d'accumulation/point limite d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement s'il l'est pour le filtre associé.

(c) si x est un point d'accumulation d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ contenant le filtre associé à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et convergent vers x.

Preuve. (a) Soit $\mathcal{F}$ un filtre avec un point d'accumulation $x \in X$. Le filtre $\mathcal{F}_X(\mathcal{F} \cup \nu(x))$(non nécéssairement propre) engendré par $\mathcal{F} \cup \nu(x)$ peut être décrit comme

$$\mathcal{G} := \mathcal{F}_X(\mathcal{F} \cup \nu(x)) = \{A \cap U \mid U \in \nu(X), A \in \mathcal{F}\}$$

En fait, c'est facile à voir que:

- *$\mathcal{G}$ et fermé par intersections finies.* Pour A, B in $\mathcal{F}$ et U, V voisinages de x on a

$$(A \cap U) \cap (B \cap V) = (A \cap B) \cap (U \cap V),$$

ce qui est dans $\mathcal{G}$.

Date: 7 mars 2014

- $\mathcal{G}$ *et fermé vers l'haute*. En fait, si $A \in \mathcal{F}$, $U \in \nu(x)$ et $S \supseteq A \cap U$, on peut écrir

  $$S = (S \cup A) \cap (S \cup U),$$

  ce qui est dans $\mathcal{G}$.
- $\mathcal{G}$ contient $\mathcal{F} \cup \nu(x)$.
- Chaque filtre qui contient $\mathcal{F} \cup \nu(x)$ doit contenir $\mathcal{G}$.

Ensuite, $\mathcal{G}$ est propre. En effet, l'intersection d'un voisinage de x avec un element de $\mathcal{F}$ n'est jamais vide, lorsque x est d'accumulation pour $\mathcal{F}$.

Alors, on peut utiliser le Théorème de l'ultrafiltre pour étendre $\mathcal{G}$ à un ultrafiltre $\mathcal{H}$. Finalement, $\mathcal{H} \supseteq \mathcal{G} \supseteq (\mathcal{F} \cap \nu(x)) \supseteq \nu(x)$, et donc $\mathcal{H}$ converge vers x.

(b) Soit $x \in X$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ une suite, et $\mathcal{F}$ le filtre lui associé. Notons que $\mathcal{F}$ peut eˆtre décrit aussi comme la collection des sous-ensembles de X qui contiennent les elements de la suite définitivement, c'est à dir ceux qui contiennent tous x_n pour n assez grand.

- *Si x est d'accumulation pour la suite, il l'est aussi pour le filtre.* Soit U un voisinage de x. Comme x est d'accumulation pour la suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il y a un nombre infini d'indices k tels que x_k est dans U. Ca implique que pour tous $A \supseteq \{x_k\}_{k>N}$, on a que A intersecte U, et donc x est d'accumulation pour le filtre.
- *Si x est d'accumulation pour le filtre, il l'est aussi pour la suite.* Soit U un voisinage de x. Comme x est d'accumulation pour le filtre, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a que $U \cap \{x_k\}_{k>N}$ n'est pas vide. On définit par récurrence une suite, en choisissant comme indiqué:

  — $n_0 := 0$;

  — $n_{k+1} \in \{m > n_k \mid x_m \in U\}$, ce qui n'est pas vide comme $U \cap \{x_k\}_{k>n_k} \neq \varnothing$.

  Une telle $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est bien une sous-suite, et elle est contenue dans U. On a donc montré que x est d'accumulation pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- *Si x est limite pour la suite, il l'est aussi pour le filtre.* Soit U un voisinage de x. Il y a $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in U$ pour $n > N$, donc $U \supseteq \{x_n\}_{n>N}$ et $U \in \mathcal{F}$. Ca veut dir que $\mathcal{F}$ converge vers x.
- *Si x est limite pour le filtre, il l'est aussi pour la suite.* Soit U un voisinage de x, ce qui doit appartenir à $\mathcal{F}$. Alors U contient $\{x_n\}_{n>N}$, pour quelque $N \in \mathbb{N}$, et ca signifie que la suite est définitivement dans U. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

(c) En utilisant les points précedents, lorsque x est un point d'accumulation pour une suite, il l'est aussi pour le filtre associé, ce qu'on peut étendre à un ultrafiltre qui converge vers x. □

Définition. Un espace X est *paracompact* ssi tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X admet un raffinement ouvert localement fini où un recouvrement (ouvert) $\mathcal{V}$ est appelé

- un *raffinement (ouvert)* de $\mathcal{U}$ ssi chaque $V \in \mathcal{V}$ est contenu dans un $U \in \mathcal{U}$;
- *localement fini* ssi tout $x \in X$ a un voisinage qui intersecte seulement un nombre fini d'éléments de $\mathcal{V}$.

Exercice 3. Montrer qu'un produit d'un espace paracompact et d'un espace compact est de nouveau paracompact. Similairement, si un produit $X \times Y$ est paracompact et $Y \neq \varnothing$ est T_1, alors X est paracompact.

Preuve.

(a) Soit X un espace paracompact et Y un espace compact. On va montrer que le produit est paracompact. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement du produit. On peut toujours le raffiner en $\mathcal{U}'$, qui contient seulement des ouverts de base. Comme Y est compact, pour tous $x \in X$ il y a $U_1^x \times V_1^x, \dots, U_{n_x}^x \times V_{n_x}^x \in \mathcal{U}'$ tels que $\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_x} U_i^x \times V_i^x$. Pour $U_x := \bigcap_{i=1}^{n_x} U_i^x$ on a que $U_x \times Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_x} U_i^x \times V_i^x$. Ensuite, $\{U_x\}_{x \in X}$ est un recouvrement ouvert du paracompact X, et donc on peut le raffiner en $\mathcal{W}$ localement fini. Pour tout $W \in \mathcal{W}$ on choisit $x(W) \in X$ tel que $W \subseteq U_{x(W)}$. On peut finalement définir

$$\mathcal{N} := \{W \times V_i^{x(W)} \subseteq X \times Y \mid W \in \mathcal{W} \text{ et } i = 1, \dots, n_{x(W)}\}.$$

On a que:

- *$\mathcal{N}$ recouvre $X \times Y$*: Pour tout $(x, y) \in X \times Y$, comme $\mathcal{W}$ est un raffinement de $\{U_x\}_{x \in X}$, il existe $W \in \mathcal{W}$ avec $x \in W \subseteq U_{x(W)}$. Ensuite, il y a un $i \in \{1, \dots, n_{x(W)}\}$ tel que $y \in V_i^{x(W)}$. Donc $(x, y) \in U_i^{x(W)} \times V_i^{x(W)}$.
- *$\mathcal{N}$ est bien un raffinement de $\mathcal{U}'$, et donc de $\mathcal{U}$*: Pour tout $W \in \mathcal{W}$ et $i = 1, \dots, n_{x(W)}$, on a que
$$W \times V_i^{x(W)} \subseteq U_{x(W)} \times V_i^{x(W)} \subseteq U_i^{x(W)} \times V_i^{x(W)} \in \mathcal{U}'.$$
- *$\mathcal{N}$ est localement fini*: Pour $(x, y) \in X \times Y$, il existe un voisinage ouvert O de x qui intersecte seulement un nombre fini d'éléments de $\mathcal{W}$. Alors $O \times Y$ est un voisinage de (x, y) qui intersecte seulement un nombre fini d'éléments de $\mathcal{N}$. En fait, l'intersection
$$W \times V_i^{x(W)} \cap O \times Y = (W \cap O) \times \left(V_i^{x(W)} \cap Y\right) = (W \cap O) \times V_i^{x(W)}$$
est vide si et seulement si $W \cap O$ l'est. Cette condition est vérifiée seulement pour un nombre fini de W, pour lesquels seulment $W \times V_1^{x(W)}, \dots, W \times V_{n_{x(W)}}^{x(W)}$ appartiennent à $\mathcal{N}$.

(b) En supposant que $Y \neq \varnothing$ est T_1 ou plus généralement, contient un point fermé $y \in Y$,
$$X \cong X \times \{y\} \subseteq X \times Y$$
est un sous-espace fermé d'un espace paracompact. Par l'exercice 2 (b) de la Série 17 (ou une vérification directe), X est aussi paracompact.

Remarque. Dans l'énoncé original du point (b), on a demandé de montrer que si $Y \neq \varnothing$ et $X \times Y$ est paracompact, alors X l'est aussi (sans demander que Y soit T_1). Cet énoncé est vrai mais la preuve n'est pas si facile que celle pour le cas où Y est T_1.

Preuve. On choisit $y \in Y$. En remplaçant $X \times Y$ par $X \times \overline{\{y\}}$ (ce qui est un sous-espace fermé de $X \times Y$ et donc paracompact), on peut supposer, sans perte de généralité, que $\overline{\{y\}} = Y$ (on dit que y est un *point générique* de Y). Maintenant, soit $\mathcal{W}$ un recouvrement ouvert de X. On choisit un raffinement ouvert localement fini $\mathcal{W}'$ du recouvrement ouvert

$$\mathcal{W} \times Y := \{W \times Y \mid W \in \mathcal{W}\} \qquad \text{de } X \times Y$$

et on aimerait montrer que $\mathrm{pr}_X \mathcal{W}' := \{\mathrm{pr}_X W \mid W \in \mathcal{W}'\}$ est un raffinement ouvert localement fini de $\mathcal{W}$. Parce que $\mathcal{W}'$ est un raffinement ouvert de $\mathcal{W} \times Y$ et la projection pr_X est ouverte, $\mathrm{pr}_X \mathcal{W}'$ est certainement un raffinement ouvert de $\mathcal{W}$ et il faut juste montrer qu'il est localement fini. Alors, soit $x \in X$ quelconque. Par définition de $\mathcal{W}'$, ils existent $U \ni x$, $V \ni y$ ouverts, tels que $U \times V$ intersecte seulement un nombre fini d'éléments de $\mathcal{W}'$ et on va montrer que U intersecte seulement un nombre fini d'éléments de $\operatorname{pr}_X \mathcal{W}'$. Par absurde, supposons le contraire. Ça veut dire qu'il existe $\mathcal{W}'' \subseteq \mathcal{W}'$ (infini) tel que

$$\{\operatorname{pr}_X W \mid W \in \mathcal{W}''\} \text{ est infini et } U \cap \operatorname{pr}_X W \neq \varnothing \text{ pour tout } W \in \mathcal{W}''.$$

Mais maintenant, pour $W \in \mathcal{W}''$, on choisit $x' \in U \cap \operatorname{pr}_X W$ et

$$W \cap (\{x'\} \times Y) \neq \varnothing \qquad \square$$

est ouvert dans $\{x'\} \times Y \cong Y$. Parce que y est un point générique de Y, on doit avoir $(x', y) \in W \cap (\{x'\} \times Y)$ et donc $(x', y) \in W \cap (U \times V)$. Alors, on a montré que $W \cap (U \times V) \neq \varnothing$ pour tout $W \in \mathcal{W}''$, ce qui est une infinité d'éléments de $\mathcal{W}$ et donc absurde. $\square$

Exercice 4. (Théorème de A. H. Stone) Montrer qu'un espace métrisable est paracompact.

Indication: Par le théorème de la série précédente, on peut toujours indicer un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ par un ensemble bien ordonné I. Alors, pour chaque $x \in X$ il y a $m(x) \in I$ minimal avec $x \in U_{m(x)}$. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}_{>0}$ on définit des ouverts $\{V_i^n\}_{i \in I}$ comme suit: Chaque V_i^n est la réunion des $B(x, 2^{-n})$ tels que

(a) $i = m(x)$; (b) $x \notin V_j^m$ pour tous $m < n$, $j \in I$; (c) $B(x, 3 \cdot 2^{-n}) \subseteq U_i$.

Maintenant, il faut montrer que $\{V_i^n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0},\, i \in I}$ est un raffinement ouvert de $\mathcal{U}$ qui est localement fini. Pour la vérification du dernier point, on prend pour chaque $x \in X$ le $i \in I$ minimal tel que $x \in V_i^n$ pour un $n \in \mathbb{N}_{>0}$ (que l'on fixe aussi). En choisissant $k \in \mathbb{N}_{>0}$ avec $B(x, 2^{-k}) \subseteq V_i^n$, on montre que la boule $B(x, 2^{-(n+k)})$ intersecte seulement un nombre fini de V_j^m en montrant que

1. *pour $m \geqslant n + k$, elle ne l'intersecte pas;*
2. *pour $m < n + k$, elle l'intersecte pour au plus un $j \in I$.*

D'abord, $\{V_i^n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0},\, i \in I}$ est bien un recouvrement parce que si $x \in X$, alors $x \in U_{m(x)}$ et il existe $n \in \mathbb{N}_{>0}$ tel que $B(x, 3 \cdot 2^{-n}) \subseteq U_{m(x)}$. Par définition, on a $x \in V_{m(x)}^n$ ou $x \in V_i^k$ pour quelques $k < n$, $i \in I$. De plus, $\{V_i^n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ est bien un raffinement de $\mathcal{U}$ par définition de V_i^n et parce que $B(x, 2^{-n}) \subseteq B(x, 3 \cdot 2^{-n})$. Montrons maintenant que ce recouvrement est bien localement fini en montrant (1) et (2) de l'indication.

Ad (1): Pour $m \geqslant n + k$, on note que V_j^m est une union de boules $B(y, 2^{-m})$ où $y \notin V_i^n$ par (b). Parce que $B(x, 2^{-k}) \subseteq V_i^n$ on a $d(x, y) \geqslant 2^{-k}$ et donc $B(x, 2^{-(n+k)}) \cap B(y, 2^{-m}) = \varnothing$, car

$$d(x, y) \geqslant 2^{-k} = 2^{-(k+1)} + 2^{-(k+1)} \geqslant 2^{-(n+k)} + 2^{-m}.$$

Ad (2): Pour $m < n + k$, $j < j' \in I$ et $y \in V_j^m$, $y' \in V_{j'}^m$ on trouve y_0, $y_0' \in X$ qui satisfont (a), (b), (c) ci-dessus avec $y \in B(y_0, 2^{-m})$, $y' \in B(y_0', 2^{-m})$. Mais maintenant, $B(y_0, 3 \cdot 2^{-m}) \subseteq U_j$ par (c) et $y_0' \notin U_j$ par (a). Donc, $d(y_0, y_0') \geqslant 3 \cdot 2^{-m}$ et alors

$$d(y, y') \geqslant d(y_0, y_0') - 2 \cdot 2^{-m} \geqslant 3 \cdot 2^{-m} - 2 \cdot 2^{-m} = 2^{-m},$$

ce qui implique que l'on ne peut pas avoir y, $y' \in B(x, 2^{-(n+k)})$ en même temps.