TOPOLOGIE - SÉRIE 15

Exercice 1. Pour un espace métrique X, un point $x \in X$ et $\varnothing \neq M \subseteq X$, on définit

$$d(x, M) := \inf_{y \in M} d(x, y), \qquad \text{la } \textit{distance} \text{ entre } x \text{ et } M.$$

Montrer que

(a) pour $\varnothing \neq M \subseteq X$ fixé, la fonction $d(-, M)\colon X \to \mathbb{R}$ est continue;

(b) $\overline{M} = \{x \in X \mid d(x, M) = 0\}$ pour tout $\varnothing \neq M \subseteq X$.

Preuve.

(a) On va montrer que $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : d(x, y) < \delta \Rightarrow |d(x, M) - d(y, M)| < \varepsilon$. Soit $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, on a $d(x, M) \leqslant d(x, m)\ \forall m \in M$ par définition de l'infimum, de plus en appliquant l'inégalité du triangle on obtient $d(x, M) \leqslant d(x, y) + d(y, m)\ \forall m \in M$. Comme cette inégalité est vraie pour tout $m \in M$, elle reste vraie en particulier pour l'infimum. On obtient donc $d(x, M) - d(y, M) \leqslant d(x, y) < \delta$. Il suffit donc de choisir $\delta := \varepsilon$ pour conclure. De la meme façon on montre que $d(y, M) - d(x, M) < \varepsilon$ si $d(x, y) < \delta := \varepsilon$.

(b) Soit $x \in \overline{M}$, par caractérisation de l'adhérence par ouverts de base on a que pour tout $\varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap M \neq \varnothing$ ce qui implique que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $m \in M$ tel que $d(x, m) < \varepsilon$ et donc $d(x, M) = 0$. Conversement, soit $x \in \{x \in M \mid d(x, M) = 0\}$. Comme $d(x, M) = 0$, par propriétés de l'infimum on a $\forall \varepsilon > 0,\ \exists m \in M$ tq $d(x, m) < \varepsilon$, ce qui implique $\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap M \neq \varnothing$, et donc $x \in \overline{M}$ par la caractérisation. □

Dans la preuve du théorème de Tychonoff on a utilisé l'axiome du choix plusieurs fois et on va montrer maintenant que c'est en fait inévitable.

Exercice 2. En utilisant le théorème de Tychonoff, montrer qu'un produit $\prod_{i \in I} X_i$ d'une famille d'ensembles non-vides $(X_i)_{i \in I}$ est non-vide (a.k.a. l'axiome du choix).
Indication: Munir chaque X_i de la topologie grossière, considérer $Y_i := X_i \amalg \{*\}$ et utiliser la PIF pour $\{A_i := \mathrm{pr}_i^{-1} X_i\}_{i \in I}$.

Preuve. On munit chaque Y_i de la topologie $\mathcal{T}_i := \{\varnothing, \{*\}, X_i, Y_i\}$ (facile de montrer que c'est bien une topologie). Comme cette topologie a seulement un nombre fini d'ouverts, l'espace $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ est compact et donc, par le théorème de Tychonoff, $Y := \prod_{i \in I} Y_i$ muni de la topologie produit l'est aussi. De plus $X_i = Y_i \setminus \{*\}$ est fermé dans Y_i, ce qui implique que $A_i := pr_i^{-1} X_i \subseteq \prod_{i \in I} Y_i$ est fermé car pr_i est continue per définition de la topologie produit. Montrons maintenant que $\{A_i\}_{i \in I}$ vérifie la PIF. Soit $J \subseteq I$ un sous ensemble fini d'indices, on veut montrer que $\bigcap_{j \in J} A_j \neq \varnothing$. Comme tous les X_j sont non vides par hypothèse, on peut choisir un élément $x_j \in X_j$ pour tout $j \in J$ (Attention: ici on n'utilise pas l'axiome du choix car J est fini!). Considérons alors $\underline{x} \in Y$ tel que

$$\underline{x}(i) = \begin{cases} x_i & \text{si } i \in J \\ * & \text{sinon,} \end{cases}$$

alors clairement $\underline{x} \in \bigcap_{j \in J} A_j$ ce qui montre que cette intersection est non vide. Donc la collection $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathfrak{P}(Y)$ est une collection de fermés qui vérifie la PIF, comme Y est compact, par caractérisation de la compacité, on conclut que $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \varnothing$. Or $\prod_{i \in I} X_i = \bigcap_{i \in I} A_i \neq \varnothing$.

Date: 25 février 2014

Exercice 3. (Théorème d'Alexandre) Soit $\mathcal{S}$ une sous-base pour la topologie d'un espace X. Si chaque recouvrement de X par ouverts de $\mathcal{S}$ admèt un sous-recouvrement fini, X est compact. *Indication: Preuve par absurde. Supposer qu'il y a un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur X sans point-limite.*

Preuve. Si les éléments de $\mathcal{S}$ ne recouvrent pas X, il y a un point $x \in X$ dont le seul voisinage est tout l'espace et alors X est compact (tout recouvrement ouvert de X doit contenir X). Supposons alors que les ouverts de sous-base recouvrent X et que $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur X sans point limite, ce qui veut dire que pour tout $x \in X$ on trouve un ouvert de base $S_1 \cap \ldots \cap S_n$ (avec $n \in \mathbb{N}$ et $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$) contenant x et $S_1 \cap \ldots \cap S_n \notin \mathcal{U}$. Parce que $\mathcal{U}$ est un filtre, on a même $S_i \notin \mathcal{U}$ pour un $i \in \{1, \ldots, n\}$. En résumé, on a montré que pour tout $x \in X$, il y a un ouvert de sous-base contenant x qui n'est pas dans $\mathcal{U}$. Autrement dit, les ouverts de sous-base pas contenu dans $\mathcal{U}$ recouvrent X. Par hypothèse, on y trouve des ouverts de sous-base $S_1, \ldots, S_n$ pas dans $\mathcal{U}$ qui déjà recouvrent X, ce qui est absurde parce que $X = S_1 \cup \ldots \cup S_n \in \mathcal{U}$ mais $S_i \notin \mathcal{U}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. □

Définition. Un ensemble totalement ordonné est *bien ordonné* ssi tout sous-ensemble non-vide a un minimum. On note qu'un sous-ensemble d'un ensemble bien ordonné est aussi bien ordonné.

Théorème. Tout ensemble peut être muni d'un bon ordre.

Définition. On définit un ensemble bien ordonné Ω comme suit: Soit X un ensemble bien ordonné indénombrable (e.g. $\mathbb{R}$ muni d'un bon ordre arbitraire). Si chaque ${\downarrow}x := \{y \in X \mid y < x\}$ avec $x \in X$ est dénombrable, alors $\Omega := X$ et sinon, on trouve le plus petit $x \in X$ avec ${\downarrow}x$ indénombrable et on pose $\Omega := {\downarrow}x$.

Exercice 4. Montrer que

(a) $I^{\mathfrak{P}(\mathbb{N})}$ est compact mais pas séquentiellement compact.

(b) Ω muni de la topologie d'ordre est séquentiellement compact mais pas compact.
Indication: Chaque suite dans Ω est bornée.

Preuve. Ad (a): L'espace $I^{\mathfrak{P}(\mathbb{N})}$ est compact par le théorème de Tychonoff. Pour montrer qu'il n'est pas séquentiellement compact, considérons la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $I^{\mathfrak{P}(\mathbb{N})}$ donnée par

$$f_n \colon \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \to I,\ M \mapsto \begin{cases} 1 & n \in M \\ 0 & n \notin M. \end{cases}$$

Pour que une sous-suite $(f_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ (avec $n \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictément croissante) converge, elle doit converger à chaque coefficient; i.e. tout les $\big(f_{n(k)}(M)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $M \subseteq \mathbb{N}$ doivent converger. Mais prenons par exemple

$$M := \{n(k) \mid k \in \mathbb{N} \text{ pair}\} = \{n(0), n(2), n(4), \ldots\}$$

où $\big(f_{n(k)}(M)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ alterne entre 1 et 0.

Ad (b): L'espace Ω n'est certainement pas compact parce que les $[0, \alpha[$ avec $0 = \min \Omega$ et $\alpha \in \Omega$ forment un recouvrement ouvert sans sous-recouvrement fini. À savoir, Ω n'a pas de maximum, parce ce que s'il y avait un maximum $M \in \Omega$, alors $\Omega = {\downarrow}M$, ce qui contredit notre définition, parce que Ω est indénombrable. Donc pour tout $\alpha \in \Omega$ il y a $\alpha < \alpha' \in \Omega$ et les $[0, \alpha[$ recouvrent Ω.

Par contre, Ω est séquentiellement compact parce que tout $M \subseteq \Omega$ dénombrable a un suprémum (soit le maximum de M, soit le minimum de $\Omega \setminus M \neq \varnothing$). Alors, si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans Ω, on prend $n(0) := 0$ et $n(k+1)$ le premier indice m avec $\alpha_m = \min_{n>n(k)} \alpha_n$. Donc

$$\alpha_{n(1)} \leqslant \alpha_{n(2)} \leqslant \ldots \leqslant \alpha_{n(k)} \leqslant \alpha_{n(k+1)} \leqslant \ldots$$

est une suite croissante et bornée, ce qui implique qu'elle converge vers $\sup_{k\in\mathbb{N}} \alpha_{n(k)}$. □