TOPOLOGIE - SÉRIE 14

Exercice 1. Pour une chaîne $X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow X_n \hookrightarrow \ldots$ de plongements, sa *colimite* est l'espace topologique X dont son ensemble sous-jacent est $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ et $U \subseteq X$ est ouvert si et seulement si tout $U \cap X_n \subseteq X_n$ est ouvert. Montrer que

(a) ça définit une topologie sur $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$;

(b) $A \subseteq X$ est fermé si et seulement si tout $A \cap X_n \subseteq X_n$ est fermé;

(c) si chaque $X_n \hookrightarrow X_{n+1}$ est un plongement fermé/ouvert alors chaque inclusion $i_n \colon X_n \hookrightarrow X$ est un plongement fermé/ouvert;

(d) si chaque X_n est T_1 et $(K, \mathcal{T})$ est un espace compact, toute application continue $f \colon K \to X$ factorise par un i_n.
Indication: Trouver $Y = \{x_0, x_1, \ldots\} \subseteq f(K)$ avec $x_n \notin X_n$ (pas forcément deux à deux distinct) et montrer que chaque $A \subseteq Y$ est fermé dans X.

Preuve.

(a) *ça définit une topologie sur $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$*; L'ensemble vide et X sont ouverts, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ les sous-ensembles $\varnothing \cap X_n = \varnothing$ et $X \cap X_n = X_n$ sont ouverts dans X_n.
Considère une famille d'ouverts $\{U_i\}_{i\in I}$ dans X. Alors la réunion est ouverte, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ le sous-ensemble $(\bigcup_{i\in I} U_i) \cap X_n = \bigcup_{i\in I}(U_i \cap X_n)$ est une réunion d'ouverts dans X_n.
Considère une famille d'ouverts $\{U_i\}_{i\in I}$ dans X, avec I fini. Alors l'intersection est ouverte, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ le sous-ensemble $(\bigcap_{i\in I} U_i) \cap X_n = \bigcap_{i\in I}(U_i \cap X_n)$ est une intersection finie d'ouverts dans X_n.

(b) *Chaque inclusion $i_n \colon X_n \hookrightarrow X$ est un plongement*;
- i_n est clairement injective.
- i_n est continue, En effet, pour tout ouvert U dans X, $i_n^{-1}(U) = U \cap X_n$, ce qui est ouvert dans X_n.
- i_n est un homeomorphisme sur l'image. En effet, si U est un ouvert de X_n, alors:
  — pour tout $m \leq n$ on a que $U \cap X_m$ est ouvert dans X_m, puisque $i_{n,m} : X_m \hookrightarrow X_n$ est continue;
  — pour tout $m \geq n$ on a que $U \cap X_m = U \subseteq i_{m,n}(X_n) \subseteq X_m$, ce qui est ouvert dans $i_{m,n}(X_n)$ puisque l'inclusion $i_{m,n} : X_n \hookrightarrow X_m$ est une composition de plongements, et donc elle l'est aussi.

  On vient de montrer que $i_n : X_n \longrightarrow i_n(X_n)$ est ouverte, et donc i_n est un homeomorphisme sur l'image.

(c) *$A \subseteq X$ est fermé si et seulement si tout $A \cap X_n \subseteq X_n$ est fermé*; $X \setminus A$ est ouvert si et seulment si $(X \setminus A) \cap X_n = X_n \setminus A = X_n \setminus (A \cap X_n)$ est ouvert dans X_n.

(d) *Si chaque X_n est T_1 et $(K, \mathcal{T})$ est un espace compact, tout application continue $f \colon K \to X$ factorise par un i_n*; Supposons que f ne pactorise par aucun X_n. Ca veut dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ in existe x_n tel que n'appartient pas à X_n. Soit $Y := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. On a que:
- *Y est infini.* En fait s'il était fini, et $x_n \in X_{m_n}$, on aura que $Y \subset X_m$, pour $m := \max\{m_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, mais x_m est un élément de Y et pas de X_m.

Date: 25 décembre 2013

- *Chaque $A \subseteq Y$ est fermé dans X*; En fait, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a que

$$A \cap X_n \subseteq Y \cap X_n \subseteq \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$$

  et donc il est fini. Alors $A \cap X_n$ est fermé dans X_n, puisque X_1 est T_1. En utilisant le point (c), on déduit qu'un tel A est fermé.
- *Y est compact*; En fait, il est fermé dans X, et donc dans $f(K)$, ce qui est compact.
- *Y est discret*; en fait tous les complementaires des singletons sont fermés.

On a donc un espace topologique qui est infini, discret et compact, et ca est une contradiction. □

Exercice 2. (Heine-Borel) Montrer pour $K \subseteq \mathbb{R}^n$ que $\big(K, (\mathcal{T}_{\text{st}})_K\big)$ est compact si et seulement si $K \subseteq \mathbb{R}^n$ est fermé et borné.
Indication: Utiliser qu'un intervalle fermé ainsi qu'un produit fini de compacts est compact.

Preuve.

[$\Longrightarrow$]; Supposons que $K \subseteq \mathbb{R}^n$ est compact. Alors on a que:

- K est borné; en effet, on peut récouvrir K avec la famille $\{B_{\mathbb{R}}(0,n) \cap K\}_{n\in\mathbb{N}}$, avec $n \in \mathbb{N}$. Par la compacité de K, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K \subseteq B_{\mathbb{R}^n}(0, N)$, c'est à dir que K est borné.
- K est ferm'e; en effet, $\mathbb{R}^n$ est d'Hausdorff, et donc n'importe quel compact est fermé.

[$\Longleftarrow$]; Supposons que K est fermé et borné. Alors pour quelque $N \in \mathbb{N}$ on a que

$$K \subseteq B_{\mathbb{R}^n}(0, N) \subseteq [-N, N]^n \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Ensuite, $[-N, N]^n$ est compact, parce que c'est un produit d'intervals fermés et bornés, ce qui sont compacts. Donc K est un fermé dans un compact, et alors il l'est aussi. □

Exercice 3. Pour un espace topologique $(X, \mathcal{T})$, les énoncés suivants sont équivalents:

(a) $(X, \mathcal{T})$ est compact;

(b) tout filtre sur X a un point d'accumulation;

(c) tout ultrafiltre sur X converge.

Indication: Utiliser la PIF.

Preuve.

$(a) \Rightarrow (b)$ Soit $\mathcal{F}$ un filtre (propre) sur un espace topologique X compact. On considère la famille de fermés $S = \{\overline{M} : M \in \mathcal{F}\}$. Puisque $\mathcal{F}$ est stable par intersections finies et ne contient pas l'ensemble vide (c'est un filtre propre), toute intersection finie d'éléments de S est non-vide. Par la caractérisation de la compacité pour les fermés, ceci veut dire que l'intersection de toute la famille est non vide, c'est-à-dire $\bigcap_{M\in\mathcal{F}} \overline{M} \neq \varnothing$. Par l'exercice 4 de la série 12, cet ensemble est l'ensemble des points d'accumulation de $\mathcal{F}$. Puisqu'il est non vide, $\mathcal{F}$ a un point d'accumulation.

$(b) \Rightarrow (c)$ Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur X. Par (b), il a un point d'accumulation. Puisque $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre, par l'exercice 4 (b) de la série 5, tout point d'accumulation est aussi un point limite, et donc $\mathcal{U}$ converge.

$(c) \Rightarrow (a)$ Soit S une famille de fermés telle qu'une intersection finie d'éléments de S est non-vide. Alors, $\mathcal{F}_X(S)$ est un filtre propre. Par le théorème de l'ultrafiltre (série 13 exercice 4), il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ tel que $\mathcal{F}_X(S) \subseteq \mathcal{U}$. Puisque $\mathcal{U}$ converge, $\mathcal{U}$ a un point d'accumulation, c'est-à-dire il existe $x \in \bigcap_{M \in \mathcal{U}} \overline{M}$. En particulier, puisque $S \subseteq \mathcal{U}$, $x \in \bigcap_{F \in S} F$. Ceci montre que X vérifie la caractérisation par les fermés de la compacité. □

Exercice 4. Montrer qu'un espace $(X, \mathcal{T})$ est compact si et seulement si l'application unique vers un point $X \to *$ est propre (cf. série 13, exercice 1).
Indication: On a, pour tout filtre $\mathcal{F}$ sur X, un espace topologique $Y := X + \{*\}$ dont les ouverts non-vides sont les $F + \{*\}$ avec $F \in \mathcal{F}$. Après, considérer la projection de l'adhérence de la "diagonale" $D := \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$.

Preuve. Il s'agit de montrer la réciproque de l'exercice 1 de la série 13. Supposons donc que pour tout Y, la projection $X \times Y \longrightarrow Y$ est fermée. On utilise l'exercice 3 et on va montrer que tout filtre $\mathcal{F}$ sur X admet un point d'accumulation.

On définit $Y_{\mathcal{F}} = X \sqcup \{*\}$ avec la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{F}} = \{F \sqcup \{*\} : F \in \mathcal{F}\} \cup \{\varnothing\}$.

On considère D comme dans l'énoncé. Soit $\mathrm{pr}_2 : X \times Y_{\mathcal{F}} \longrightarrow Y_{\mathcal{F}}$ la projection sur la deuxième composante. Alors, $\mathrm{pr}_2(\bar{D})$ est fermé par hypothèse. Mais $X \subseteq \mathrm{pr}_2(\bar{D})$, et puisque $\{*\}$ n'est pas ouvert (le fitre $\mathcal{F}$ est propre), $\mathrm{pr}_2(\bar{D}) = Y_{\mathcal{F}}$.

Ceci implique l'existence de $x \in X$ tel que $(x, *) \in \bar{D}$. En particulier, pour tout voisinage ouvert U de x et tout $F \in \mathcal{F}$, $D \cap (U \times (F \sqcup \{*\})) \neq \varnothing$. Autrement dit, il existe $y \in X$ avec $y \in U$ et $y \in F$. Ceci montre que $U \cap F \neq \varnothing$, et donc x est un point d'accumulation de $\mathcal{F}$. □