TOPOLOGIE - SÉRIE 13

Exercice 1. Montrer que pour un espace compact $(X, \mathcal{T})$, toute projection

$$\mathrm{pr}_2 \colon (X \times Y, \mathcal{T} * \mathcal{T}') \to (Y, \mathcal{T}')$$

avec $(Y, \mathcal{T}')$ un espace quelconque est fermée (i.e. l'image d'un fermé par pr_2 reste fermé).

Preuve. Soit F un fermé de $X \times Y$ et $y \notin \mathrm{pr}_2(F)$. Ceci implique que $X \times \{y\} \subseteq (X \times Y) \setminus F$. Par le lemme du tube, il existe un ouvert V contenant y tel que $X \times V \subseteq (X \times Y) \setminus F$. Ceci montre que $y \in V \subseteq Y \setminus \mathrm{pr}_2(F)$, c'est-à-dire que le complémentaire de $\mathrm{pr}_2(F)$ est ouvert dans Y, et donc que $\mathrm{pr}_2(F)$ est fermé. □

Remarque. Une application continue $f \colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ est appelée *propre* si et seulement si pour tout espace $(Z, \mathcal{T}'')$, l'application produit $f \times \mathrm{id}_Z \colon (X \times Z, \mathcal{T} * \mathcal{T}'') \to (Y \times Z, \mathcal{T}' * \mathcal{T}'')$ est fermé. Alors l'exercice dit que pour $(X, \mathcal{T})$ compact, l'application unique $X \to *$ est propre.

Exercice 2. Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ (vu comme sous-espaces de $\mathbb{R}^{n^2}$ avec la topologie standard) sont compacts.
Indication: Une matrice est dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *si et seulement si ses colonnes forment une base orthonormale.*

Preuve. Comme la topologie des espaces de matrices est toujours euclidéenne, on peut utiliser le Théorème de Heine-Borel (série 14). On a que:

- $O_n(\mathbb{R})$ est borné; en fait, pout n'importe quelle $M \in O_n(\mathbb{R})$ et $i, j = 1, \ldots, n$, de l'equation $MM^t = Id$ on deduit

$$|M_{i,j}| = \sqrt{|M_{i,j}|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2} = \sqrt{1} = 1;$$

  En particulier ca donne que $O_n(\mathbb{R})$ ets borné.
- Pour avoir que $SO_n(\mathbb{R})$ est compacte, ca suffit de montrer qu'il est fermé dans $O_n(\mathbb{R})$, ce qui est compact. On peut l'écrir de la facon suivante:

$$SO_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap \det{}^{-1}(\{1\}),$$

  et donc il est fermé dans $O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3. (Compactifié d'Alexandrov) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $\dot{X} := X + \{\infty\}$ l'union disjointe de X et un point ∞. Appelons un sous-ensemble $U \subseteq \dot{X}$ ouvert si et seulement si soit $U \subseteq X$ est ouvert soit $\infty \in U$ et $X \setminus U \subseteq X$ est fermé et compact. Montrer que

(a) avec cette définition des ouverts, $\dot{X}$ est un espace topologique compact;
(b) $(X, \mathcal{T})$ est un sous-espace ouvert de $\dot{X}$ et $\{\infty\} \subseteq \dot{X}$ est fermé;
(c) si $(X, \mathcal{T})$ est de Hausdorff, alors $\dot{X}$ est de Hausdorff si et seulement si tout point $x \in X$ possède un voisinage compact;
(d) chaque application continue $f \colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ dont les préimages des compacts sont compacts (parfois aussi appelé *propre*) induit une application continue $\dot{f} \colon \dot{X} \to \dot{Y}$ avec $\dot{f}|_X = f$ et $\dot{f}(\infty) = \infty$;

Date: 12 mars 2014

(e) si $(X, \mathcal{T})$ est un espace compact de Hausdorff, $x \in X$ et $X' := X \setminus \{x\}$, alors $\dot{X}'$ est homéomorphe à $(X, \mathcal{T})$;

(f) $\dot{\mathbb{R}}^n \cong S^n$ où $\mathbb{R}^n$ est muni de la topologie standard.
Indication: Projection stéréographique.

Preuve.

(a) *$\dot{X}$ est un espace topologique compact*; En effet:

- L'ensemble vide est ouvert, comme il est un ouvert dans X, et $\dot{X}$ est ouvert, comme $X \setminus \dot{X} = \varnothing$ est un compact fermé de X.
- Considère une réunion d'une famille de sous-ensembles $\{V_i\}_{i\in I}$ de $\dot{X}$. Si tous V_i est contenu dans X, il est ouvert et la réunion l'est aussi.

  Sinon il existe V_j qui contient ∞, et $X \setminus V_j$ est compact et fermé. Alors $\bigcup_{i\in I} V_i$ contient ∞ et son complementaire dans X est

  $$X \setminus (\bigcup_{i\in I} V_i) = X \setminus V_j \cap \bigcap_{i\neq j} (X \setminus V_i),$$

  ce qui est compact et fermé, puisque $X \setminus V_j$ est compact et fermé et $\bigcap_{i\neq j}(X \setminus V_i)$ est fermé. Donc $\bigcup_{i\in I} V_i$ est ouvert.
- Considère une intersection finie d'une famille de sous-ensembles $\{V_i\}_{i\in I}$ de $\dot{X}$. S'il existe V_j qui est contenu dans X, l'intersection ne contient pas ∞ et on peut lécrire

  $$\bigcap_{i\in I} U_i = \bigcap_{i\in I} (X \cap U_i),$$

  ce qui est ouvert dans X puisque c'est une intersection finie d'ouverts dans X.

  Si tous V_i contient ∞, et $X \setminus V_i$ est compact et fermé, alors $\bigcap_{i\in I} U_i$ contient ∞ et son complementaire dans X est

  $$X \setminus (\bigcap_{i\in I} V_i) = \bigcup_{i\in I} (X \setminus V_j),$$

  ce qui est compact et fermé, puisque c'est une réunion finie de sous-espaces compacts et fermés.

Pour voir que $\dot{X}$ est compact, suppose qu'on a un recouvrement ouvert $\{V_i\}_{i\in I}$. En particulier ∞ appartient à V_j pour quelque j, et $X \setminus V_j$ est compact. Donc un nombre fini de V_i est suffisant pour couvrir $X \setminus V_j$. En rajoutant V_j à ce recouvrement, on a un recouvrement de $\dot{X}$, toujours fini. Donc $\dot{X}$ est compact.

(b) *X est un sous-espace ouvert de $\dot{X}$ et $\{\infty\} \subseteq \dot{X}$ est fermé*; Clairement X est ouvert dans $\dot{X}$, et donc le complementaire $\{\infty\}$ est fermé.

(c) Si $(X, \mathcal{T})$ est de Hausdorff, alors $\dot{X}$ est de Hausdorff si et seulement si tout point $x \in X$ possède un voisinage compact; Supposons X d'Haussdorff.

- $[\Longrightarrow]$; On va montrer que chaque point de X a un voisinage compact. Soit $x \in X$. Comme $\dot{X}$ est d'Hausdorff, on peut séparer x et ∞ par deux ouverts disjoints U et V dans $\dot{X}$, où U contient x et V contient ∞. Mais alors $X \setminus V$ est compact, et il contient U. Donc il est un voisinage compact de x.

- [$\Longleftarrow$]; On va montrer que $\dot{X}$ est d'Hausdorff. Soient x et x' deux points differents de $\dot{X}$. Si les deux sont dans X, comme X est d'Hausdorff, on peut les separer par deux ouverts disjoints dans X. Supposons après que $x' = \infty$. Prenons V un voisinage compact (et donc fermé) de x dans X. Ca veut dir qu'il existe un ouvert U dans X tel que $x \in U \subseteq V$. Alors U et $\{\infty\} \cup (X \setminus V)$ sont deux ouverts disjoints de $\dot{X}$ et ils contiennent réspectivement x et ∞. Donc $\dot{X}$ est d'Hausdorff.

(d) *Chaque application continue* $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ *dont les préimages des compacts sont compacts (parfois aussi appelé propre) induit une application continue* $\dot{f}\colon \dot{X} \to \dot{Y}$ *avec* $\dot{f}|_X = f$ *et* $\dot{f}(\infty) = \infty$; Une telle fonction $\dot{f}$ est bien definie, et continue sur X. Il reste à montrer la continuité en ∞. Soit $U \subset \dot{Y}$ un voisinage de $\infty = \dot{f}(\infty) \in \dot{Y}$. En particulier, $U = \{\infty\} \cup U'$, où $Y \setminus U'$ compact. Alors $\dot{f}^{-1}(U)$ contient ∞ et le complementaire dans X est

$$X \setminus \dot{f}^{-1}(U) = X \setminus f^{-1}(U') = f^{-1}(Y \setminus U'),$$

ce qui est compact et fermé. Donc $f^{-1}(U)$ est ouvert dans $\dot{X}$ et $\dot{f}$ est continue.

(e) *Si* $(X, \mathcal{T})$ *est un espace compact de Hausdorff,* $x \in X$ *et* $X' := X \setminus \{x\}$*, alors* $\dot{X}'$ *est homéomorphe à* $(X, \mathcal{T})$; On peut d'efinir une bijection:

$$\varphi : \dot{X}' \longrightarrow X,$$

où $\varphi(x') := x'$ si $x' \neq \infty$ et $\varphi(\infty) := x$. On a que φ est continue sur X'. On va montrer que l'est aussi dans ∞. Soit U un voisinage de $x = \varphi(\infty)$ dans X. Alors $\varphi^{-1}(U)$ contient ∞ et $X' \setminus \varphi^{-1}(U) = X \setminus U$, ce qui est fermé dans le compact X, et donc est compact lui même. Ca montre que $\varphi^{-1}(U)$ et ouvert et φ et continue. Ensuite, $\dot{X}'$ est compact, et X est d'Hausdorff, donc il faut que φ soit un homeomorphisme.

(f) $\dot{\mathbb{R}}^n \cong S^n$ *où* $\mathbb{R}^n$ *est muni de la topologie standard*; en utilisant le point precedent (les spheres sont compactes et d'Hausdorff), ca suffit de montrer que $S^n \setminus \{P\}$, pour n'importe quel $P \in S^n$, est homeomorphe à $\mathbb{R}^n$. Soit $P := (1, 0, \ldots, 0)$ dans la sphere. Alors on définit la projection stereographique

$$\varphi : S^n \setminus \{P\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

de la facon suivante. Pour tous $Q \in S^n$, divers de P, $\varphi(Q)$ est le (seul) point d'intersection entre la ligne determinée par les point P et Q et l'hyperplan d'équation $\{x_0 = 0\}$. En écrivant la formule explicite pour cette intersection la, on obtient

$$\varphi(x_0, \ldots, x_n) = \frac{1}{1 - x_0}(x_1, \ldots, x_n).$$

On voit facilement que φ est bien définie, continue, bijective et avec inverse continue. Donc φ est un homeomorphisme.

Pour un ensemble X, notons $\mathrm{PFlt}(X)$ l'ensembles des filtres propres sur X, partiellement ordonné par inclusion.

Exercice 4. Pour un filtre $\mathcal{F}$ sur un ensemble X, prouver que les énoncés suivants sont équivalents.

(a) $\mathcal{F}$ est un élément maximal dans $\mathrm{PFlt}(X)$.

(b) Pour tout $A \subseteq X$, soit $A \in \mathcal{F}$, soit $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

(c) $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre.

En utilisant le lemme de Zorn, déduire que l'on peut étendre tout filtre en un ultrafiltre.

Preuve. "*(a) $\Rightarrow$ (b)*": Si $\mathcal{F}$ est maximal et $A \subseteq X$ avec $X \setminus A \notin \mathcal{F}$, alors le filtre $\mathcal{F}^+$ engendré par $\mathcal{F} \cup \{A\}$ est propre. À savoir: Parce que $X \setminus A \notin \mathcal{F}$ on doit avoir $B \not\subseteq X \setminus A$ pour tout $B \in \mathcal{F}$, ce qui veut exactement dire $B \cap A \neq \varnothing$. Donc $\mathcal{F}^+$ est propre et $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^+$. Mais $\mathcal{F}$ est maximal et donc $\mathcal{F} = \mathcal{F}^+$; i.e. $A \in \mathcal{F}$.

"*(b) $\Rightarrow$ (c)*": Si $A \cup B \in \mathcal{F}$ et $B \notin \mathcal{F}$ alors, par hypothèse, $X \setminus B \in \mathcal{F}$. Donc, on a aussi $(A \cup B) \cap (X \setminus B) = A \setminus B \in \mathcal{F}$ et alors $A \in \mathcal{F}$, parce que $A \setminus B \subseteq A$.

"*(c) $\Rightarrow$ (a)*": Soit $\mathcal{G}$ un filtre propre avec $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ et $A \in \mathcal{G}$. Parce que $X = A \cup (X \setminus A) \in \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre, on doit avoir soit $A \in \mathcal{F}$, soit $X \setminus A \in \mathcal{F}$. Mais $X \setminus A \in \mathcal{F}$ est impossible parce que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, $A \in \mathcal{G}$ et $\mathcal{G}$ est un filtre propre.

Ad "déduire que…": L'ensemble $\mathrm{PFlt}(X)$ est ordonné par inclusion et si $C \subseteq \mathrm{PFlt}(X)$ est une chaine de filtres, alors $\mathcal{G} := \bigcup_{\mathcal{F} \in C} \mathcal{F}$ est une borne pour C (on vérifie facilement que $\mathcal{G}$ est un filtre propre). Par le lemme de Zorn, on peut étendre tout filtre en un filtre maximal (i.e. un ultrafiltre). $\square$