TOPOLOGIE - SÉRIE 12

Dans la géométrie différentielle on parle souvent des "variétés connexes" même si on veut vraiment dire "variétés connexes par arcs". L'exercice suivant est une justification pour ça.

Exercice 1. Montrer qu'un espace localement connexe par arcs est connexe si et seulement s'il est connexe par arcs.
Indication: Utiliser la caractérisation du cours et conclure que les composantes connexes par arcs sont ouvertes.

Solution. Les composantes connexes par arcs d'un espace X forment une partition et en notant que les composantes connexes par arcs sont non-vides et ouvertes (être localement connexe par arcs implique que chaque point a un voisinage connexe par arcs), la connexité de X implique qu'il y a qu'une seule composante connexe par arcs. □

Exercice 2. Dans cet exercice tous les espaces de matrices sont considérés comme sous-espaces de $\mathbb{C}^{n^2}$ muni de la topologie standard. Déterminer les composantes connexes par arcs de

(a) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$
(b) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
(c) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$
(d) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$
(e) $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$

Indication: Pour (a) et (c), se convaincre que pour chaque $A \in \mathrm{GL}_n$, ils existent des matrices élémentaires $P_1, \dots, P_k$, $Q_1, \dots, Q_l$ de la forme $E + \lambda E_{i,j}$ avec $i \neq j$ telles que $P_1 \dots P_k A Q_1 \dots Q_l$ est une matrice diagonale. Après réduire au cas SO_n et utiliser l'exercice 4 de la semaine passée. Pour (b) et (d), réduire à (a) et (c).

Solution. On remarque que, de l'algèbre linéaire, on peut réduir n'importe quelle matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) à une matrice diagonale par un nombre fini d'*opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes.* En particulier, une opération sur les lignes corresponde exactement á multiplier á gauche par une matrice $Q^{\bar{i},\bar{j}}(q)$ de la forme suivante. Pour des $\bar{i} \neq \bar{j}$ fixés et tels que $n \geq \bar{i}, \bar{j} \geq 1$ et q dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$):

$$Q^{\bar{i},\bar{j}}(q)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ q & \text{si } i = \bar{i} \text{ et } j = \bar{j} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

De façon similaire, une opération sur les colonnes est équivalent à multiplier à droite par une telle matrice.

Donc pour n'importe quelle matrice M à coefficients dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), il y a des matrices élémentaires à coefficients dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) telles que

$$M = Q^{i_k,j_k}(q_k) \cdots Q^{i_1,j_1}(q_1) D(d_1, \dots, d_n) Q^{i'_1,j'_1}(q'_1) \cdots Q^{i'_{k'},j'_{k'}}(q'_{k'}),$$

avec $D(d_1, \dots, d_n)$ diagonale, de la forme

$$D(d_1, \dots, d_n)_{i,j} = \begin{cases} d_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

En particulier toutes les $Q^{i,j}$ sont inversibles de détérminant 1.

Date: 16 décembre 2013

(a): Soit $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Alors il y a

$$D(d_1, \ldots, d_n) = Q^{i_k,j_k}(q_k) \cdots Q^{i_1,j_1}(q_1) M Q^{i'_1,j'_1}(q'_1) \cdots Q^{i'_{k'},j'_{k'}}(q'_{k'}),$$

avec $D(d_1, \ldots, d_n)$ diagonale de déterminant 1; c'est à dire $d_1 \cdot \cdots \cdot d_n = 1$.

- On peut connecter M et $D(d_1, \ldots, d_n)$ par le chemin

  $$\alpha_1 \colon t \mapsto Q^{i_k,j_k}((1-t)q_k) \cdots Q^{i_1,j_1}((1-t)q_1) M Q^{i'_1,j'_1}((1-t)q'_1) \cdots Q^{i'_{k'},j'_{k'}}((1-t)q'_{k'}),$$

  qui est continue et tel que tout $\alpha_1(t)$ est de déterminant 1.
- On peut connecter $D(d_1, \ldots, d_n)$ à une matrice diagonale D' dont les valeurs sur la diagonale sont seulement 1 et -1. Explicitement, on a le chemin

  $$\alpha_2 \colon t \mapsto \begin{bmatrix} A(t) := D\left(t \operatorname{sign} d_1 + (1-t)d_1, \ldots, t \operatorname{sign} d_{n-1} + (1-t)d_{n-1}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\det A(t)} \end{bmatrix},$$

  qui est continue et tel que $\alpha_2(t)$ est toujours de déterminant 1.
- On peut connecter D' à la matrice identité, puisque D' et la matrice identité sont dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, ce qui est connexe par arcs.

Donc chaque matrice dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est dans la même composante connexe par arcs de la matrice identité, ce que veut dire que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

(b): Comme $\det \colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times$ est continue (c'est une application polynômiale dans les coefficients de la matrice) et $\mathbb{R}^\times$ a deux composantes connexes par arcs, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ doit avoir au moins deux composantes connexes par arcs; à savoir les matrices de déterminant positif $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_+$ et celles de déterminant négatif $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_-$. Il faut donc montrer que ces deux sous-espaces sont connexes par arcs. Alors, soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_+$.

- On peut connecter M une matrice $M' \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, par le chemin

  $$\alpha_1 \colon I \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ t \mapsto D\left(1, \ldots, 1, t + \frac{(1-t)}{\det M}\right) \cdot M.$$

- Ensuite, on peut connecter $M' \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ à la matrice identité $E = D(1, \ldots, 1)$, puisque $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Donc chaque matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_+$ est dans la même composante connexe par arcs que la matrice identité E. Pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_-$ on note que

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_- \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_+,\ M \mapsto D(1, \ldots, 1, -1)M$$

est un homéomorphisme et alors $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_-$ est aussi connexe par arcs. En résumé, on a montré que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes par arcs; les matrices de déterminant positif et celles de déterminant négatif.

(c) & (d): Soit $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ (resp. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$). Comme dans le cas réel on peut connecter M à une matrice diagonale $D(d_1, \ldots, d_n)$ du même déterminant (i.e. $\det M = d_1 \cdot \ldots \cdot d_n$). Vu que $\mathbb{C}^\times$ est connexe par arcs, on peut choisir des chemins $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \colon I \to \mathbb{C}^\times$ tels que $\gamma_i(0) = d_i$, $\gamma_i(1) = 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $\gamma_n(0) = \det M$, $\gamma_n(1) = 1$ (pour $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ il faut choisir le chemin constant). Maintenant,

$$t \mapsto \begin{bmatrix} A(t) := D(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_{n-1}(t)) & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_n(t)}{\det A(t)} \end{bmatrix},$$

est un chemin dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ (resp. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$) entre $D(d_1, \ldots, d_n)$ et $E = D(1, \ldots, 1)$. Alors, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs.

(e): Par le même argument que pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, l'espace $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ a au moins deux composantes connexes par arcs; les matrices de déterminant positif $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ et les matrices de déterminant négatif $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})_-$. On sait déjà que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs et l'application

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}),\ M \mapsto D(1,\dots,1,-1)M$$

est un homéomorphisme. Alors, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})_-$ sont les composantes connexes par arcs de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Dans cet exercice, on va déterminer les composantes connexes par arcs de $\mathbb{R}^\omega$ par rapport à des topologies différentes.

(a) Déterminer les composantes connexes par arcs de $(\mathbb{R}^\omega, *_{n\in\omega}\mathcal{T}_{\mathrm{st}})$.

(b) Montrer que deux suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans la même composante connexe par arcs de $(\mathbb{R}^\omega, \mathcal{T}_{\bar{\rho}})$ si et seulement si $x - y = (x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Indication: Il suffit de considérer le cas $y = 0$.

(c) Démontrer que deux suites x, y sont dans la même composante connexe par arcs de $(\mathbb{R}^\omega, \mathcal{T}_{\mathrm{box}})$ si et seulement si $x - y$ est nulle presque partout (i.e. ssi $x - y \in \mathbb{R}^\infty$).
Indication: Il suffit de considérer le cas $y = 0$. *De plus, si* $x \notin \mathbb{R}^\infty$ *il existe un homéomorphisme* $f\colon (\mathbb{R}^\omega, \mathcal{T}_{\mathrm{box}}) \to (\mathbb{R}^\omega, \mathcal{T}_{\mathrm{box}})$ *tel que* $f(0) = 0$ *et* $f(x)$ *n'est pas bornée.*

Preuve.

(a) Par l'exercice $1(c)$ de la série 11, et puisque $\mathbb{R}$ est connexe par arc, alors $\mathbb{R}^\omega$ muni de la topologie du produit est connexe par arc.

(b) On résout d'abord le cas $y = 0$. On a déja vu dans la série 10 exercice $3(b)$ que l'ensemble des suites bornées et son complémentaire forment une séparation de $\mathbb{R}^\omega$ muni de la topologie uniforme. Par conséquent, puisque la suite $y = 0$ est bornée, pour toute suite x non bornée, x et y ne peuvent être dans la même composante connexe et donc a fortiori dans la même composante connexe par arc.
Supposons maintenant que x est borné et on construit l'application $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}^\omega$ définie par $\lambda(t)_n = t \cdot x_n$. Il est clair que $\lambda(0) = y$ et $\lambda(1) = x$. Il reste donc à montrer que λ est continue. Pour cela, utilisons la continuité ε-δ. Soit $1 > \varepsilon > 0$. Puisque x est borné, il existe $B \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n| < B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On définit $\delta = \frac{\varepsilon}{2B}$. Pour $s, t \in I$ avec $|t - s| < \delta$, alors

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}(\lambda(t), \lambda(s)) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \min(|t \cdot x_n - s \cdot x_n|, 1) \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \min(|t - s||x_n|, 1) \\
&\leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ceci montre que λ est continue et donc que la composante connexe par arc de $y = 0$ dans $\mathbb{R}^\omega$ muni de la topologie uniforme est l'ensemble des suites bornées.
Maintenant, on remarque que pour $y \in \mathbb{R}^\omega$, l'application $-+y : \mathbb{R}^\omega \longrightarrow \mathbb{R}^\omega$, $x \mapsto x+y$ est continue lorsque $\mathbb{R}^\omega$ est muni de la topologie uniforme (utiliser $\delta = \varepsilon$). Par conséquent, si $x, y \in \mathbb{R}^\omega$ sont tels que $x - y$ est bornée, alors par ce qui précède, il existe un chemin continu entre 0 et $x - y$. En post-composant ce chemin par l'application continue $- + y$, on obtient un chemin continu entre y et x.

Supposons maintenant qu'il existe un chemin continue entre y et x. Alors en post-composant par l'application continue $- + (-y)$, on obtient un chemin entre 0 et $x - y$. Ceci montre que $x - y$ est borné, par le cas $y = 0$.

(c) On résout d'abord le cas $y = 0$. Si $x \in \mathbb{R}^\infty$, alors on considère le même chemin que pour le (b) et on montre sa continuité locale. Pour cela soit $t \in I$ et $U = \prod_{n\in\mathbb{N}}]a_n, b_n[$ un ouvert de base de la topologie boîte sur $\mathbb{R}^\omega$ qui contient $\lambda(t)$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n = 0$ pour tout $n > N$ (ceci existe car $x \in \mathbb{R}^\infty$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe γ_n tel que $]\lambda(t)_n - \gamma_n, \lambda(t)_n + \gamma_n[\subseteq]a_n, b_n[$ et on pose $\varepsilon = \min_{n \leqslant N} \gamma_n$. Par (b), il existe δ tel que si $|s - t| < \delta$, alors $\lambda(s) \in B_{\bar{\rho}}(\lambda(t), \varepsilon)$. Ceci implique que pour tout $n \leqslant N$, $|\lambda(t)_n - \lambda(s)_n| < \gamma_n$ et donc $\lambda(s)_n \in]a_n, b_n[$. De plus, si $n > N$, alors $\lambda(s)_n = \lambda(t)_n = 0$. Ceci montre que pour tout $s \in B(t, \delta)$, $\lambda(s) \in U$. Ceci montre que λ est continu pour la topologie boîte lorsque $x \in \mathbb{R}^\infty$.

Maintenant, on montre que pour $y, z \in \mathbb{R}^\omega$ avec $z_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, les applications $- + y : \mathbb{R}^\omega \longrightarrow \mathbb{R}^\omega$ et $- \cdot z : \mathbb{R}^\omega \longrightarrow \mathbb{R}^\omega$ sont continues lorsque $\mathbb{R}^\omega$ est muni de la topologie boîte.

Soit $U = \prod_{n\in\mathbb{N}}]a_n, b_n[$ un ouvert de base. Alors $(- + y)^{-1}(U) = \prod_{n\in\mathbb{N}}]a_n - y_n, b_n - y_n[$ qui est ouvert, donc $- + y$ est bien continue. Par ailleurs, $(- \cdot z)^{-1}(U) = \prod_{n\in\mathbb{N}}]\frac{a_n}{z_n}, \frac{b_n}{z_n}[$ qui est ouvert, donc $- \cdot z$ est bien continue.

Supposons par l'absurde qu'il existe un chemin entre 0 et x avec $x \notin \mathbb{R}^\infty$. Alors il existe une suite d'indices strictement croissante $k_i, i \in \mathbb{N}$ tels que $x_{k_i} \neq 0$. On définit $z_{k_i} = \frac{i}{|x_{k_i}|}$ et si $n \neq k_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, on pose $z_n = 1$.

Puisque $- \cdot z : \mathbb{R}^\omega \longrightarrow \mathbb{R}^\omega$ est continue, il existe un chemin entre 0 et $x \cdot z$. On remarque que $|(x \cdot z)_{k_i}| = i$ et donc la suite $(x \cdot z)$ est non bornée. Cela constitue une contradiction avec (b), puisque la topologie boîte est plus fine que la topologie uniforme.

Ceci montre que la composante connexe par arc de 0 dans $\mathbb{R}^\omega$ muni de la topologie boîte est $\mathbb{R}^\infty$.

On procède maintenant comme dans (b) pour établir le cas général $(y \neq 0)$.

Exercice 4. Pour un filtre $\mathcal{F}$ sur un espace topologique $(X, \mathcal{T})$, montrer que

$$\bigcap_{M\in\mathcal{F}} \overline{M} = \{x \in X \mid x \text{ est un point d'accumulation de } \mathcal{F}\}.$$

Preuve. Soit x un point d'accumation d'un filtre $\mathcal{F}$ et $M \in \mathcal{F}$. Alors, par définition, pour tout voisinage ouvert U de x, $U \cap F \neq \varnothing$, et donc $x \in \overline{M}$. Par conséquent, $x \in \bigcap_{M\in\mathcal{F}} \overline{M}$.

Réciproquement, si $x \in \bigcap_{M\in\mathcal{F}} \overline{M}$, alors pour tout voisinage ouvert U de x et tout $M \in \mathcal{F}$, $U \cap M \neq \varnothing$ puisque $x \in \overline{M}$, ce qui montre que x est un point d'accumulation de $\mathcal{F}$. $\square$