TOPOLOGIE - SÉRIE 11

Exercice 1. Montrer que

(a) si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique et $(Y_i, \mathcal{T}_{Y_i})_{i\in I}$ une famille de sous-espaces connexes par arcs de X tels que pour tout i, $j \in I$ il y a $k \in I$ avec $Y_i \cap Y_k$, $Y_j \cap Y_k \neq \varnothing$ (e.g. si $\bigcap_{i\in I} Y_i \neq \varnothing$) alors $\bigcup_{i\in I} Y_i$ est connexe par arcs;

(b) si $(X, \mathcal{T})$ est connexe par arcs et $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ est continue, alors $\big(f(X), \mathcal{T}'_{f(X)}\big)$ est connexe par arcs;

(c) si $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ est une famille d'espaces topologiques connexes par arcs, alors leur produit $(\prod_{i\in I} X_i, \ast_{i\in I} \mathcal{T}_i)$ est connexe par arcs.

Preuve.

(a) Si $\lambda : [a, b] \longrightarrow X$ et $\lambda' : [c, d] \longrightarrow X$ sont telles que $\lambda(b) = \lambda'(c)$ alors par le lemme de recollement, l'application $\lambda \star \lambda' : [a, b + (d - c)] \longrightarrow X$ définie par

$$[\lambda \star \lambda'](t) = \begin{cases} \lambda(t) & a \leqslant t \leqslant b \\ \lambda'(c + t - b)) & b \leqslant t \leqslant b + (d - c) \end{cases}$$

est continue. On remarque que c'est un chemin de $\lambda(a)$ à $\lambda'(d)$.

Soient $x, y \in \bigcup_{s\in I} Y_s$. Alors il existe $i, j \in I$ tels que $x \in Y_i$, $y \in Y_j$. Par hypothèse, il existe $k \in I$, $z \in Y_k \cap Y_i$ et $w \in Y_k \cap Y_j$. Par hypothèse, Y_i, Y_k, Y_j sont connexes par arc, donc il existe des applications continues

- $\lambda_1 : [a, b] \longrightarrow Y_i \subseteq \bigcup_{s\in I} Y_s$ telle que $\lambda_1(a) = x$ et $\lambda_1(b) = z$;
- $\lambda_2 : [c, d] \longrightarrow Y_k \subseteq \bigcup_{s\in I} Y_s$ telle que $\lambda_2(c) = z$ et $\lambda_2(d) = w$;
- $\lambda_3 : [e, f] \longrightarrow Y_j \subseteq \bigcup_{s\in I} Y_s$ telle que $\lambda_3(e) = w$ et $\lambda_3(f) = y$. □

Alors, $(\lambda_1 \star \lambda_2) \star \lambda_3$ est un chemin dans $\bigcup_{s\in I} Y_s$ allant de x à y.

(b) Soient $y_1, y_2 \in f(X)$. Alors il existe $x_1, x_2 \in X$ tels que $f(x_i) = y_i$, pour $i = 1, 2$. Puisque X est connexe par arc, il existe $\lambda : [a, b] \longrightarrow X$ tel que $\lambda(a) = x_1$ et $\lambda_(b) = x_2$. Alors, $f \circ \lambda : [a, b] \longrightarrow f(X)$ est continue (comme composition d'applications continues), c'est un chemin allant de y_1 à y_2.

(c) Soient $x, y \in \prod_{i\in I} X_i$. Soit $i \in I$. Puisque X_i est connexe par arc, et quitte a reparamétriser, il existe un chemin $\lambda_i : [0, 1] \longrightarrow X_i$ avec $\lambda_i(0) = x(i)$ et $\lambda_i(1) = y(i)$.

On obtient ainsi (via axiome du choix) une collection de chemins $(\lambda_i)_{i\in I}$, avec λ_i verifiant la propriété ci-dessus.

On utilise la propriété universelle du produit (une proposition du cours), qui implique l'existence d'une (unique) application continue $\lambda : [0, 1] \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i$ telle que $\lambda_i = \mathrm{proj}_i \circ \lambda$ pour tout $i \in I$. On remarque que $\lambda(0)(i) = \mathrm{proj}_i \circ \lambda(0) = \lambda_i(0) = x(i)$ pour tout $i \in I$, et donc $\lambda(0) = x$. De même, on vérifie que $\lambda(1) = y$, ce qui achève la preuve.

Exercice 2. Les espaces suivants, sont-ils connexes par arcs?

(a) $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$

(b) $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$

Date: 16 décembre 2013

(c) $(I^2, \mathcal{T}_<)$ où $<$ est l'ordre lexicographique sur $I^2 = [0,1]^2$
Indication: Pour un chemin dans I^2, considérer les préimages des segments verticaux $\{x\} \times]0,1[$ et utiliser le théorème de la valeur intermédiaire, aussi que le fait que $\mathbb{Q} \cap I$ est dénombrable.

Preuve.

(a) On va monter que tous les points du disque D^n sont dans la même composante connexe par arcs que l'origine O, d'où le disque est connexe par arcs.
Pour chaque $P \in D^n$, le chemin defini par

$$t \in I \mapsto tP \in D^n$$

est bien defini et continue. En effet, chaque composante est de la forme $t \in I \mapsto tx$, pour quelque $x \in I$, et la multiplication de nombres réelles est continue.
Ensuite, $0 \mapsto O$ et $1 \mapsto P$.

(b) Dans S^0 il y a deux composantes connexe (par arcs), une pour chaque élément. Si $n > 0$, on va monter que tous les points du disque S^n sont dans la même composante connexe par arcs que $Q := (0, \ldots, 0, 1) \in S^n$, d'où la sphère est connexe par arcs.
Pour chaque $P = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n$, le chemin defini par

$$t \in I \mapsto (tx_1, \ldots, tx_n, \sqrt{1 - \sum_{j=1}^{n} t^2 x_j^2}) \in S^n$$

est bien defini et continue. En effet, chaque composante est de la forme

- soit $t \in I \mapsto t \cdot x$, pour quelque $x \in I$, et la multiplication de nombres réelles est continue.
- soit $t \mapsto \sqrt{1 - \sum_{j=1}^{n-1} t^2 x_j^2}$, pour quelque $x_1, \ldots, x_n$, et les operations polynomials sont continues, aussi bien que la racine carrée.

Ensuite, $0 \mapsto Q$ et $1 \mapsto P$.

(c) On va montrer que les composantes connexes de I^2 sont les sous-ensembles de la forme suivante:

$$\{x\} \times I = \{(x, y) \mid y \in I\},$$

pour quelque $x \in I$.
En effet, pour tous $x \in I$ et $(x, y) \in \{x\} \times I$, il y a un chemin qui connecte (x, y) et $(x, 0)$:

$$t \in I \mapsto (x, ty).$$

Le chemin est bien defini et continue, puisque la topologie de sous-espace sur $\{x\} \times I$ est la même que celle induite par la topologie standard. Ensuite, $0 \mapsto (x, 0)$ et $1 \mapsto (x, y)$.
Pourtant, on remarque que:

- *I est séparable*; en effet $\mathbb{Q} \cap I$ est une partie dense et dénombrable.
- *l'image d'un espace topologique séparable par une application continue et surjective l'est aussi*; si $f : X \longrightarrow Y$ est continue et X admet une partie dense dénombrable Q, alors $f(Q)$ est partie dense dénombrable pour Y. En effet, on a que:
  — $|f(Q)| \leq |Q|$, ce qui est dénombrable.

— $\overline{f(Q)} = Y$. Soit $y \in Y$, et $U \subseteq Y$ un voisinage de y. La preimage $f^{-1}(U)$ est ouverte et non vide, donc elle contient quelque $q \in Q$. Mais alors U contient $f(q) \in f(Q)$.

- *les seuls intervals dans I^2 qui sont séparable sont ces qui ont image contenue dans quelque $\{x\} \times I$*; Soit $](a,b),(a',b')[\subseteq I^2$ un interval, et $a' > a$. Soit $\{(x_j, y_j) \mid \in \mathbb{N}\}$ un sous-ensemble dénombrable de $](a,b),(a',b')[$. En particulier, $\{x_j \mid j \in \mathbb{N}\} \subseteq I$ est dénombrable. Soit $x \in I \setminus \{x_j \mid j \in \mathbb{N}\}$. Alors $](x, \frac{1}{3}),(x, \frac{2}{3})[$ est un voisinage de $(x, \frac{1}{2})$ qui ne contient (x_j, y_j) pour aucun $j \in \mathbb{N}$. On a montré que aucun sous-ensemble dénombrable de I^2 peut être dense.

Si $x < x'$, ce n'est pas possible de connecter deux points de la forme (x, y) et (x', y'). En effet, si un chemin contient les deux dans son image, par la Théorème de la valeure intermediaire (I est connexe!) il faut qu'elle soit un interval qui contienne tous l'interval $](x,y),(x',y')[$. Mais I est séparable, autant que $](x,y),(x',y')[$ ne l'est pas.

Exercice 3. Montrer que SO_n (avec la topologie sous-espace de $(\mathbb{R}^{n^2}, \mathcal{T}_{\mathrm{st}})$) est connexe par arcs. *Indication: Chaque matrice dans SO_n est conjugée à une matrice par blocs diagonales où chaque bloc est de la forme*

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad [1].$$

Preuve. On va montrer qu'il existe un chemin reliant l'identité I_n à toute matrice de SO_n. Soit $A \in \mathrm{SO}_n$ une matrice orthogonale de déterminant 1.

Alors, en utilisant de l'algèbre linéaire (nous ne détaillerons pas cette partie ici, le lecteur peut consulter *Linear Algebra Done Right* de Axler, théorème 7.38), on peut montrer qu'il existe une matrice de changement de base orthogonale P telle que

$$A = P \begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_m \end{bmatrix} P^{-1},$$

où A_i est une matrice de la forme $R(\alpha_i) = \begin{bmatrix} \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix}$ ou bien $[1]$. (Le nombre de blocs de la forme $[-1]$ est pair puisque le déterminant est 1, on peut alors les regrouper 2 par 2 sous la forme $\begin{bmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{bmatrix}$.) On montre le résultat par récurrence sur le nombre de blocs de la forme $R(\alpha_i)$ avec $\cos\alpha_i \neq 1$.

S'il y en a 0, alors c'est trivial, car alors $A = I_n$. Supposons qu'il existe un chemin reliant l'identité à toute matrice de SO_n pouvant s'écrire sous la forme ci-dessus avec k blocs non triviaux (de la forme $R(\alpha_i)$ avec $\cos\alpha_i \neq 1$), et montrons qu'alors c'est aussi vrai pour les matrices avec $k+1$ blocs non triviaux.

Soit donc une telle matrice A et soit A_j le premier bloc non trivial.

On définit l'application $\lambda : [0, \alpha_j] \longrightarrow R^{n^2}$ donnée par

$$\lambda(t) = \begin{bmatrix} A_1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & A_{j-1} & & & & \\ & & & R(t) & & & \\ & & & & A_{j+1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & A_m \end{bmatrix}.$$

Celle-ci est continue car les fonctions cos et sin sont continues. Par ailleurs, le codomaine de l'application peut être restreint à SO_n. Maintenant, puisque la multiplication $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n \longrightarrow \mathrm{GL}_n$ est continue, l'application de conjugaison par P, $\mathrm{conj}_P : \mathrm{GL}_n \longrightarrow \mathrm{GL}_n$ qui associe à M la matrice PMP^{-1} est aussi continue. Par ailleurs, cette application se restreint à une application $\mathrm{conj}_P : \mathrm{SO}_n \longrightarrow \mathrm{SO}_n$.

On remarque maintenant que $\mathrm{conj}_P \circ \lambda$ est un chemin entre $P\lambda(0)P^{-1}$ et A. Puisque $\lambda(0)$ a k blocs non triviaux et par hypothèse de récurrence, il existe un chemin c reliant I_n à $P\lambda(0)P^{-1}$. Par conséquent, la concaténation des chemins $c \star (\mathrm{conj}_P \circ \lambda)$ avec point de départ I_n et point d'arrivée A.

Exercice 4. Montrer que

(a) $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\mathrm{cof}})$ (où $\mathcal{T}_{\mathrm{cof}}$ est la topologie cofinie) est connexe;

(b) si X est un ensemble avec $|X| \geqslant 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$, alors $(X, \mathcal{T}_{\mathrm{cof}})$ est connexe par arcs. *Indication: Considérer d'abord le cas $X = \mathbb{R}$ et pour le cas général, utiliser qu'un sous-espace de $(X, \mathcal{T}_{\mathrm{cof}})$ est aussi muni de la topologie cofinie.*

Preuve.

(a) Soit $\mathbb{N} = A \cup B$, avec A et B disjoints. Si A est ouvert, lorsque B est contenu dans le complementaire de A il est fini. Mais alors B est ouvert si et seulement si B est vide. Ca montre que $\mathbb{N}$ est connexe.

(b) On va montrer que dans $\mathbb{R}$ avec la topologie cofinie tous les points sont dans la même composante connexe par arcs que 0. Soit x dans $\mathbb{R}$. Considerons l'application:

$$a:\ I \longrightarrow (\mathbb{R}, cof) \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}} (\mathbb{R}, st)\ ,$$

donnée par $t \mapsto tx \mapsto tx$. Alors a est continue, parce que la topologie cofinie est moins fine que la topologie standard. Ensuite $0 \mapsto 0$ et $1 \mapsto x$.

Soit maintenant X est un espace topologique non dénombrable avec la topologie cofinie. On va monter qu'il y a une seule composante connexe par arcs. Soient x et y dans X. Soit $R \subseteq X$ un sous-ensemble qui a la même cardinalité que $\mathbb{R}$ et qui contient x et y. Il existe une bijection $\varphi : R \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\varphi(y) = 0$. Ensuite, φ est un homéomorphisme si on considère on $\mathbb{R}$ la topologie de sous-espace (ce qui est toujours la topologie cofinie!) et la topologie cofinie sur $\mathbb{R}$. Considerons le chemin

$$a:\ I \longrightarrow (\mathbb{R}, cof) \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}} (\mathbb{R}, st) \xrightarrow{\varphi^{-1}} R \subseteq X\ ,$$

defini par $t \mapsto t\varphi(x) \mapsto t\varphi(x) \mapsto \varphi^{-1}(t\varphi(x))$. On a que $0 \mapsto 0\varphi(x) = 0 \mapsto 0 \mapsto \varphi^{-1}(0) = y$ et $1 \mapsto 1\varphi(x) = \varphi(x) \mapsto t\varphi(x) \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$. Donc on a connecté x et y.