TOPOLOGIE - SÉRIE 7

Exercice 1. Montrer que

(a) tout sous-espace d'un espace de Hausdorff est de Hausdorff;

(b) tout produit de deux espaces de Hausdorff est de Hausdorff;

(c) si $(Y, \mathcal{T}')$ est un espace de Hausdorff et $f\colon (X, \mathcal{T}) \hookrightarrow (Y, \mathcal{T}')$ est une injection continue alors $(X, \mathcal{T})$ est aussi de Hausdorff.

Preuve.

(a) Soit X un espace d'Hausdorff, et $Y \subseteq X$ un sous-espace. On va montrer que Y est d'Hausdorff aussi. Soient y et y' deux points divers de Y. En particulier on peut les séparer dans X par deux ouverts disjoints U et U' qui contiennent réspectivement y et y'. Maintenant $U \cap Y$ et $U' \cap Y$ sont ouverts disjoints dans Y, et ils contiennent encore y et y'.

(b) Soient X et Y deus espaces d'Hausdorff. On va montrer que $X \times Y$ est d'Hausdorff aussi. Soient (x, y) et (x', y') deux poiints divers de $X \times Y$. En particulier $x \neq x'$ ou $y \neq y'$. Supposons que $x \neq x'$, et soient U, U' deux ouverts disjoints dans X qui contiennent réspectivement x, x'. Alors on a que $U \times Y$ et $U' \times Y$ sont ouverts dans $X \times Y$, ils sont disjoints et ils contiennent réspectivement (x, y) et (x', y').

(c) On va montrer que X est d'Hausdorff. Soient x et x' deux points divers de X. Comme i est injective, $i(x) \neq i(x')$, et on peut donc les séparer dans Y par deux ouverts disjoints U et U' qui contiennent réspectivement $i(x)$ et $i(x')$. Ensuite $i^{-1}(U)$ et $i^{-1}(U')$ sont deux ouverts disjoints qui séparent x et x' dans X. □

Exercice 2. Les mêmes énoncés que dans 1(a) et (b) mais avec "métrisable" en lieu de "Hausdorff". Trouver un contrexemple pour l'énoncé 1(c) avec "métrisable" en lieu de "Hausdorff".

Preuve.

(a) Soit (X, d_X) un espace métrique, et $Y \subseteq X$ un sous-espace. On va montrer que Y est métrisable. On définit $d_Y : Y \times Y \longrightarrow [0, +\infty)$ par réstriction of d_X. Alors c'est clair que les axiomes de m'etrique sont toujours satisfaits. Il faut qu'on montre que la topologie induite sur Y par d_Y est en effet la topologie de sous-espace $\mathcal{T}_Y$.

- $[\mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{T}_{d_Y}]$; Soit $U \in \mathcal{T}_Y$. Alors $U = Y \cap V$ pour quelque $V \in \mathcal{T}_X$. Soit maintenant $y \in U$. Alors il y a une boule $B_X(y, r)$ qui est contenue dans V, et ensuite $B_Y(y, r) = B_X(y, r) \cap Y$ est contenue dans U. Donc U est ouvert dans $\mathcal{T}_{d_Y}$.
- $[\mathcal{T}_{d_Y} \subseteq \mathcal{T}_Y]$; Chaque boule ouvert $d_Y(y, r)$ est en effet égal à $Y \cap B_X(y, r)$, ce qui est ouvert dans $\mathcal{T}_Y$.

(b) Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deus espaces métriques. On va montrer que $X \times Y$ est métrisable. On definit

$$d_{X \times Y} : (X \times Y) \times (X \times Y) \longrightarrow [0, +\infty),$$
$$d_{X \times Y}((x, y)(x', y')) := d_X(x, x') + d_Y(y, y').$$

On va verifier que les axiomes de métrique sont valids.
Soient $(x, y)(x', y'), (x'', y'') \in X \times Y$.

Date: 7 novembre 2013

- Positivité:

$$d_{X\times Y}((x,y)(x',y'))=0 \iff d_X(x,x')+d_Y(y,y')=0 \iff$$

$$\iff d_X(x,x')=0 \text{ et } d_Y(y,y')=0 \iff x=x' \text{ et } y=y' \iff (x,y)=(x',y').$$

- Symmétrie: claire.
- Inégalité triangulaire:

$$d_{X\times Y}((x,y)(x'',y'')) := d_X(x,x'')+d_Y(y,y'') \leq$$

$$\leq (d_X(x,x')+d_X(x',x''))+(d_Y(y,y')+d_Y(y',y'')) =$$

$$= d_{X\times Y}((x,y)(x',y'))+d_{X\times Y}((x',y')(x'',y'')).$$

Donc $d_{X\times Y}$ est bien une métrique. Il faut qu'on montre que la topologie induite sur $X\times Y$ par $d_{X\times Y}$ est en effet la topologie produit $\mathcal{T}_{X\times Y}$.

- $[\mathcal{T}_{X\times Y} \subseteq \mathcal{T}_{d_{X\times Y}}]$; Un base pour la topologie produit est donnée par les produits d'une boule overte de X et une boule ouvertede Y. Soient $B_X(x,r)$ et $B_Y(y,s)$ deux boule ouvertes de X et Y réspectivement. On va montrer que $B_X(x,r)\times B_Y(y,s)$ est ouvert dans $\mathcal{T}_{d_{X\times Y}}$. Soit $(x,y)\in B_X(x,r)\times B_Y(y,s)$. Alors

$$B_{X\times Y}((x,y),\min\{r,s\}) \subseteq B_X(x,r)\times B_Y(y,s).$$

- $[\mathcal{T}_{d_{X\times Y}} \subseteq \mathcal{T}_{X\times Y}]$; Soit $B_{X\times Y}((x,y),r)$ une boule ouverte de $X\times Y$. On va monter qu'elle est ouverte dans $\mathcal{T}_{X\times Y}$. Soit $(x,y)\in B_{X\times Y}((x,y),r)$. Alors

$$B_X(x,\frac{r}{2})\times B_Y(y,\frac{r}{2}) \subseteq B_{X\times Y}((x,y),r).$$

(c) Considérons la droite de Sorgenfrey $\mathbb{R}_l$ avec $\mathbb{R}$ comme ensemble sous-jacent et les intervalles de la forme $[a,b[$ comme base pour la topologie. En observant que $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}_l$ est dense (tout intervalle $[a,b[$ contient un nombre rationnel) on déduit que si $\mathbb{R}_l$ serait métrisable, on y trouverait une base dénombrable pour la topologie de $\mathbb{R}_l$ (à savoir, les boules de rayon rationnel autour des $x\in\mathbb{Q}$ par rapport à une métrique qui induit la topologie). Or, $\mathbb{R}_l$ n'a pas de base dénombrable parce que supposons qu'il y a une telle base $\mathcal{B}=\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sans perte de généralité, on a $B_n=[a_n,b_n[$ pour quelques a_n, $b_n\in\mathbb{R}_l$ parce qu'on peut toujours diminuer les ouverts d'une base. Mais maintenant il y a $x\in\mathbb{R}_l\setminus\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et donc l'ouvert $[x,x+1[$ ne contient aucun ouvert de base autour de x.

Parce que la topologie de $\mathbb{R}_l$ est plus fine que la topologie standard sur $\mathbb{R}$, l'application $\mathrm{id}\colon\mathbb{R}_l\to\mathbb{R}$ est continue et bijective mais comme on a vu, $\mathbb{R}_l$ n'est pas métrisable. □

Exercice 3. Trouver un exemple qui montre qu'on ne peut pas généraliser le Lemme de Recollement au cas infini. Plus spécifiquement, trouver une application $f\colon(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}')$ et une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces de X tels que $X=\bigcup_{n=0}^{\infty}X_n$ et les $f|_{X_n}\colon(X_n,\mathcal{T}_{X_n})\to(Y,\mathcal{T}')$ sont continues pour tout $n\in\mathbb{N}$ mais f ne l'est pas.

Preuve. On considère $X=\mathbb{N}$ avec la topologie de complément fini et $Y=\mathbb{N}$ avec la topologie discrète, et $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ l'application identité. Il est clair que f n'est pas continue, car la topologie discrète est strictement plus fine que la topologie de complément fini.

On pose $X_n=\{n\}$, il est clair que $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}X_n$. Par ailleurs, toute application constante est continue, et donc $f|_{X_n}$ est toujours continue. Ceci fournit le contre-exemple demandé. □

On se souvient qu'une application $(f_1, f_2)\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y \times Z, \mathcal{T}_Y * \mathcal{T}_Z)$ est continue si et seulement si $f_1\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ et $f_2\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ sont continues. En reversant la situation, on se demande si un résultat analogue est juste pour une application $X \times Y \to Z$.

Exercice 4. Considérons $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $I := [0, 1]$ comme sous-espaces de $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ respectivement (munis des topologies standards) et définissons

$$f\colon (S^1 \times I, \mathcal{T}_{S^1} * \mathcal{T}_I) \to (S^1, \mathcal{T}_{S^1}),\ (e^{i2\pi\varphi}, t) \mapsto e^{i2\pi\varphi^t}$$

où $\varphi \in \,]0, 1]$ (et donc φ^t est bien-défini pour tout $t \in I$).

(a) Montrer que f est continue en chaque variable. Plus spécifiquement, ça veut dire que pour tout $z \in S^1$ et $t \in I$, les applications

$$f(z,-)\colon \begin{array}{rcl} (I, \mathcal{T}_I) & \to & (S^1, \mathcal{T}_{S^1}) \\ s & \mapsto & f(z, s) \end{array} \qquad \text{et} \qquad f(-,t)\colon \begin{array}{rcl} (S^1, \mathcal{T}_{S^1}) & \to & (S^1, \mathcal{T}_{S^1}) \\ w & \mapsto & f(w, t) \end{array}$$

sont continues.

(b) L'application f, est-elle continue?

Preuve.

(a) On commence par montrer que $c\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par $f(t) = e^{i2\pi t}$ est continue. En fait, par la propriété universelle du produit, il suffit de montrer qu'elle est continue composante par composante. Mais $c(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ et le cours de première année d'analyse permet de conclure que c est continue puisque les fonctions sinus et cosinus le sont. On peut maintenant restreindre le domaine à I et le codomaine à S^1 et la fonction est toujours continue.

On a donc montré que $q\colon I \longrightarrow S^1$ définie par $q(t) = e^{i2\pi t}$ est continue.

- Pour $z = e^{i2\pi\varphi}$, $\varphi > 0$ fixé, on remarque que la fonction

$$\begin{aligned} g\colon I &\longrightarrow I \\ s &\mapsto \varphi^s = e^{s \ln \varphi} \end{aligned}$$

est continue comme composition d'applications continues. Par conséquent, $f(z, -) = q \circ g$ est aussi continue.

- On procède via le lemme de recollement. On pose

$$S^1 = \{(x, y) \in S^1 : y \geqslant 0\} \cup \{(x, y) \in S^1 : y \leqslant 0\}$$

et on montre que $f(-, t)$ est continue sur chacun des fermés. De la géométrie élémentaire (trigonométrie) montre que $d(q(x), q(y)) = 2\sin(\pi(x - y))$ lorsque $|x - y| \leqslant \frac{1}{2}$. Une analyse de fonction appliqué à $2\sin(\pi(x - y)) - x$ montre que cette fonction est positive pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$. Ceci montre que $d(q(x), q(y)) > |x - y|$ lorsque $|x - y| < \frac{1}{2}$. Ainsi, $q : [0, \frac{1}{2}] \longrightarrow \{(x, y) \in S^1 : y \geqslant 0\}$ est un homéomorphisme.

Pour t fixé, on remarque que la fonction

$$\begin{aligned} g\colon]0, \frac{1}{2}] &\longrightarrow I \\ s &\mapsto s^t = e^{t \ln s} \end{aligned}$$

est continue comme composition d'applications continues, et elle tend vers 0 quand s converge vers 0. Par conséquent, on peut la prolonger par continuité par $g(0) = 0$ (les espaces sont métriques). Ainsi, $f(-, t) = q \circ gq^{-1}$ est continue lorsque restreinte à $\{(x, y) \in S^1 : y \geqslant 0\}$. Un raisonnement analogue montre la continuité sur l'autre fermé, et le lemme de recollement achève la preuve.

(b) On considère la suite $x_n = (\frac{1}{2^n}, \frac{1}{n})$ qui converge vers $(0,0)$ dans $I \times I$. Puisque q est continue, $(e^{i2\pi\frac{1}{2^n}}, \frac{1}{n})$ converge vers $(1,0) = (q(0),0)$ dans $S^1 \times I$. Mais $f(e^{i2\pi\frac{1}{2^n}}, \frac{1}{n}) = e^{i2\pi\frac{1}{2}} = -1$ et donc cette suite ne converge pas vers $f(1,0) = 1$.

Ceci montre que f n'est pas continue. $\square$