TOPOLOGIE - SÉRIE 6

Exercice 1. Soient (X, d), (Y, d') deux espaces métriques et $f\colon X \to Y$. Prouver que f est continue si et seulement si elle est continue au sens ε-δ:

$$\forall x \in X\, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\, \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}\, \forall x' \in X\colon d(x, x') < \delta \;\Rightarrow\; d'(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Preuve. On remarque d'abord que la condition au-dessus est equivalente à la suivante:

$$\forall x \in X\, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\, \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} : f(B_X(x, \delta)) \subseteq B_Y(f(x), \varepsilon).$$

$[\Longrightarrow]$ Puisque f est continue, on a que pour tout $x \in X$ et $r > 0$ la préimage de la boule ouverte $B_Y(f(x), \varepsilon) \subseteq Y$ est ouverte et elle contient x. En particulier, on a qu'il existe une boule ouvert dans X de la forme $B_X(x, \delta)$ tel que $B_X(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B_Y(f(x), \varepsilon))$, et donc $f(B_X(x, \delta)) \subseteq B_Y(f(x), \varepsilon)$.

$[\Longleftarrow]$ Soit $U \subseteq Y$ un ouvert, tel que $f^{-1}(U)$ n'est pas vide. On va montrer que $f^{-1}(U)$ est ouvert. Soit $x \in f^{-1}(U)$. Puisque U est ouvert et il contient $f(x)$, il y a une boule $B_Y(f(x), \varepsilon)$ qui est contenue dans U. En utilisant l'hypothèse on a qu'il existe $\delta > 0$ tel que $f(B_X(x, \delta)) \subseteq B_Y(f(x), \varepsilon)$, et donc $B_X(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B_Y(f(x), \varepsilon)) \subseteq f^{-1}(U)$. Donc $f^{-1}(U)$ est ouvert. □

Exercice 2. Soient $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques.

(a) Montrer que $(Y, \mathcal{T}')$ est de Hausdorff si et seulement si la diagonale

$$\Delta_Y := \{(y, y) \mid y \in Y\} \subseteq Y \times Y$$

est fermée par rapport à la topologie produit $\mathcal{T}' * \mathcal{T}'$ sur $Y \times Y$.

(b) Pour $(Y, \mathcal{T}')$ de Hausdorff, $D \subseteq X$ dense (par rapport à $\mathcal{T}$) et f, $g\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ continues, montrer que $f = g$ si et seulement si $f|_D = g|_D$.

Preuve.

(a) $[\Longrightarrow]$ On va montrer que si Y est d'Hausdorff, alors le complementaire de la diagonale est ouvert. Soit $(x, y) \notin \Delta_Y$. Alors $x \neq y$ e lorsque Y est d'Haudorff il y a deux ouverts disjoints U et V qui contiennent respectivement x et y. Alors $U \times V$ est ouvert dans $Y \times Y$, il contient (x, y) et il n'intersecte pas la diagonale.

$[\Longleftarrow]$ Soit $x \neq y$ dans Y. Ca veut dire que $(x, y) \notin \Delta_Y$. Alors il y a un ouvert de base de $Y \times Y$ qui contient (x, y) et qui n'intersecte pas la diagonale. Cela signifie que $(x, y) \in U \times V \subseteq Y \times Y \setminus \Delta_Y$, pour quelques ouverts U et V dans X. En particulier, on deduit que $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \varnothing$.

(b) On va montrer que $E := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} = X$. En effet, si on definit $h : X \longrightarrow Y \times Y$ par $h(x) := (f(x), g(x))$, alors elle est continue parce que le sont ses projections f et g. Ensuite, $E = h^{-1}(\Delta)$, qui est fermé comme h est continue et X est d'Hausdorff. Par ailleurs $E \supseteq D$. Donc on a $E = \overline{E} \supseteq \overline{D} = X$. □

Exercice 3. Soient Y un ensemble totalement ordonné (muni de la topologie d'ordre), $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et f, $g\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_<)$ deux applications continues. Montrer que

(a) $\{x \in X \mid f(x) \leqslant g(x)\} \subseteq X$ est fermé;

Date: 31 octobre 2013

(b) l'application minimum $\min\colon (Y\times Y, \mathcal{T}_< * \mathcal{T}_<) \to (Y, \mathcal{T}_<)$ est continue.
Indication: Lemme de Recollement.

Preuve.

(a) On note $A = \{x \in X : f(x) \leqslant g(x)\}$. Soient $x \in X$ avec $f(x) > g(x)$. On va montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de x avec $U \subseteq (X \setminus A)$. On distingue deux cas.
- S'il existe $z \in]g(x), f(x)[$, alors on définit $U = g^{-1}\,]-\infty, z[\ \cap f^{-1}\,]z, +\infty[$. Le sous-ensemble U est ouvert puisque f et g sont continues. De plus, si $y \in U$ alors $g(y) < z < f(y)$ et donc $y \in X \setminus A$. Il est évident que $x \in U$.
- Si $]g(x), f(x)[= \varnothing$, alors on définit $U = g^{-1}\,]-\infty, f(x)[\ \cap f^{-1}\,]g(x), +\infty[$. Pour les mêmes raisons que précédemment, U est un voisnage ouvert de x. De plus, si $y \in U$ alors $g(y) < f(x)$ et donc puisque $]g(x), f(x)[= \varnothing$, on a que $g(x) \geqslant g(y)$. De même, on obtient que $f(y) \geqslant f(x)$. Puisque $f(x) > g(x)$, par transitivité on obtient que $y \in X \setminus A$.

Ceci montre que le complémentaire de A est ouvert et donc que A est fermé.

(b) On pose $A_0 = \{(x, y) \in Y \times Y : x \leqslant y\}$ et $A_1 = \{(x, y) \in Y \times Y : y \leqslant x\}$. Ce sont des fermés par le point précédent appliqué aux projections $\pi_1, \pi_2 : Y \times Y \longrightarrow Y$. On remarque que $\min|_{A_0} = \pi_1|_{A_0}$ et $\min|_{A_1} = \pi_2|_{A_1}$ et donc celles-ci sont continues (par restriction du domaine). On a que $A_1 \cup A_2 = Y$ car l'ordre sur Y est total. Par le lemme de recollement, il suffit de montrer que ces deux applications coincident sur $A_1 \cap A_0$, ce qui est évident. □

Définition. Pour une application d'ensembles $f\colon X \to Y$ et un filtre $\mathcal{F}$ sur X on définit *l'image directe* de $\mathcal{F}$ par f

$$f_*\mathcal{F} := \mathcal{F}_Y\left\{fA \mid A \in \mathcal{F}\right\} \overset{(*)}{=} \left\{B \subseteq Y \,\middle|\, f^{-1}B \in \mathcal{F}\right\}$$

comme le filtre engendré par les images directes des éléments de $\mathcal{F}$.

Exercice 4. Soit $f\colon X \to Y$ une application quelconque.

(a) Montrer l'égalité $(*)$ ci-dessus et conclure que l'image directe $f_*\mathcal{F}$ d'un filtre propre $\mathcal{F}$ est de nouveau propre.
Indication: Les fA avec $A \in \mathcal{F}$ forment une base de filtre.

Maintenant suppose que X et Y sont de plus munis de topologies et $x \in X$. Montrer que

(b) si f est continue et x un point d'accumulation d'un filtre $\mathcal{F}$ sur X alors fx est un point d'accumulation de $f_*\mathcal{F}$;

(c) f est continue en x si et seulement si pour tout filtre $\mathcal{F}$ sur X, $\mathcal{F} \to x$ implique $f_*\mathcal{F} \to fx$.

Solution.

(a) Soient $A, B \in \mathcal{F}$, avec $\mathcal{F}$ un filtre propre. On a que $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ et puisque $\mathcal{F}$ est propre, l'ensemble $\{f(A) : A \in \mathcal{F}\}$ est une base de filtre. Ceci montre que $f_*\mathcal{F}$ est un filtre propre.
On montre l'égalité $(*)$. Soit $\mathcal{G} = \{B \subseteq Y : f^{-1}B \in \mathcal{F}\}$ et soit $Z \in \mathcal{F}_Y(\{f(A) : A \in \mathcal{F}\})$. Ceci veut dire qu'il existe $A \in \mathcal{F}$ avec $f(A) \subseteq Z$ (puisque les $f(A)$ forment une base de filtre).
Or, $A \subseteq f^{-1}f(A) \subseteq f^{-1}Z$ donc on a que $f^{-1}Z \in \mathcal{F}$, et ainsi $Z \in \mathcal{G}$. Si $B \subseteq Y$ est tel que $f^{-1}B \in \mathcal{F}$, alors $ff^{-1}B \subseteq B$ et donc $B \in \mathcal{F}_Y(\{f(A) : A \in \mathcal{F}\})$.
On a donc montré que $\mathcal{G} = \mathcal{F}_Y(\{f(A) : A \in \mathcal{F}\})$.

(b) Soit U un ouvert qui contient $f(x)$ et $B \in f_*\mathcal{F}$. Puisque f est continue en $x \in X$, on a l'existence d'un voisinage ouvert $x \in V$ tel que $f(V) \subseteq U$. Or $V \cap f^{-1}(B) \neq \varnothing$ puisque x est un point d'accumulation de $\mathcal{F}$.

Puisque $f(V \cap f^{-1}(B)) \subseteq f(V) \cap ff^{-1}B \subseteq U \cap B$, $U \cap B$ est non vide.

(c) Il est clair que si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$, alors $f_*\mathcal{F} \subseteq f_*\mathcal{F}'$. On a donc que $\mathcal{F} \longrightarrow x \Rightarrow f_*\mathcal{F} \longrightarrow f(x)$ pour tout filtre $\mathcal{F}$ sur X si et seulement si $\mathcal{V}(f(x)) \subseteq f_*(\mathcal{V}(x))$.

On a va donc montrer que $\mathcal{V}(f(x)) \subseteq f_*(\mathcal{V}(x))$ si et seulement si f continue en x. On commence par le sens direct.

Soit U un voisinage ouvert de $f(x)$. Par hypothese, $f^{-1}U \in \mathcal{V}(x)$, et donc $f^{-1}U$ contient un voisinage ouvert de x. Ceci montre que f est continue en x.

Supposons que f est continue en x, et soit $A \in \mathcal{V}(f(x))$. Alors A contient un voisinage ouvert V de $f(x)$. Par hypothèse, $f^{-1}V$ contient un voisinage ouvert de x, c'est à dire $V \in f_*(\mathcal{V}(x))$. Par conséquent, $A \in f_*(\mathcal{V}(x))$. $\square$