**TOPOLOGIE - SÉRIE 4**

**Exercice 1.** Pour un espace métrique $(X, d)$, $x \in X$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, montrer que la boule fermée

$$\bar{B}(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant \varepsilon\}$$

est vraiment fermée dans $X$ et montrer qu'elle inclut l'adhérence de la boule ouverte

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Donner un exemple où cette inclusion $\overline{B(x, \varepsilon)} \subseteq \bar{B}(x, \varepsilon)$ est stricte.

*Preuve.* On va montrer que le complementaire de toute boule fermée est ouvert. Soient $y \in X$ et $r > 0$, et $x \notin \bar{B}(y, r)$. Alors $B(x, d(x, y) - r) \subseteq X \setminus \bar{B}(y, r)$. En effet, si $z \in B(x, d(x, y) - r)$, alors on a

$$d(y, x) \leq d(y, z) + d(z, x) < d(y, z) + (d(x, y) - r),$$

d'où on obtient $d(y, z) > r$, ce qui donne $z \in X \setminus \bar{B}(y, r)$. Puisque $\bar{B}(y, r)$ est fermé et il contient $B(y, r)$, on a $\overline{B(y, r)} \subseteq \bar{B}(y, r)$.

Si on considère $\{a, b\}$ comment un ensemble avec la métrique dicrète, alors

$$\overline{B(a, 1)} = \overline{\{a\}} = \{a\},$$

mais $\bar{B}(a, 1) = \{a, b\}$, et donc l'inclusion est stricte. □

**Exercice 2.** Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $M$, $N \subseteq X$ et $\{M_i\}_{i \in I}$ un ensemble des sous-ensembles de $X$. Déterminer si les égalités suivantes sont satisfaites. Dans les cas contraires, déterminer laquelle des inclusions "$\subset$" ou "$\supset$" est vraie et donner un contre-exemple pour l'autre.

(a) si $M \subseteq N$, alors $\bar{M} \subseteq \bar{N}$;
(b) $\overline{M \cup N} = \bar{M} \cup \bar{N}$;
(c) $\bigcup_{i \in I} \bar{M_i} = \overline{\bigcup_{i \in I} M_i}$;
(d) $\overline{M \cap N} = \bar{M} \cap \bar{N}$;
(e) $\bigcap_{i \in I} \bar{M_i} = \overline{\bigcap_{i \in I} M_i}$;
(f) $\overline{A \setminus B} = \bar{A} \setminus \bar{B}$.

*Solution.* (a) OUI; si $M \subseteq N$, alors $\bar{N}$ est un fermé qui contient $M$. Donc il faut qu'il contienne aussi $\bar{M}$.

(b) OUI; $\bar{M} \cup \bar{N}$ est un fermé qui contient $M \cup N$. Donc il contient $\overline{M \cup N}$; de l'autre côté, $\overline{M \cup N}$ est un fermé qui contient $M$ et $N$, donc $\bar{M}, \bar{N} \subseteq \overline{M \cup N}$, et ensuite $\bar{M} \cup \bar{N} \subseteq \overline{M \cup N}$.

(c) NON; le même argument que celui dans (b) marche pour l'inclusion $\bigcup_{i \in I} \bar{M_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} M_i}$, mais l'autre n'est pas verifiée. Ca suffit de considérer la collection $A_n := [0, 1 - \frac{1}{n}]$, avec la topologie éuclideenne; alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bar{A_n} = [0, 1)$, cependant que $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} = [0, 1]$.

(d) NON; comme $\bar{M} \cap \bar{N}$ est un fermé qui contient $M \cap N$, on a l'inclusion $[\subseteq]$. Pourtant l'autre n'est pas verifiée. Par example, on peut considérer $M := [0, 1)$ et $N := [1, 2]$, avec la topologie éuclideenne. Alors $\overline{M \cap N} = \varnothing$, mais $\bar{M} \cap \bar{N} = \{1\}$.

(e) NON; l'inclusion $[\supseteq]$ marche comment dans le cas de l'intersection finie, mais comment on vu dans (d) l'autre inclusion n'est verifié pas même dans le cas fini.

*Date:* 16 octobre 2013

(f) NON; si on prend $A := [0,1]$ et $B := \{1\}$, avec la topologie standard. Alors $\overline{A \setminus B} = [0,1]$, mais $\overline{A} \setminus \overline{B} = [0,1)$. Par contre, c'est vrai que $\overline{A \setminus B} \supseteq \overline{A} \setminus \overline{B}$. Soit $x \in \overline{A} \setminus \overline{B}$. En particulier il y a un voisinage $V$ de $x$ qui n'intersecte pas $B$. Si ensuite on prend un voisinage $U$ de $x$, on a que $U \cap V$ l'est aussi, et donc il intersecte $A$. Chaque $z \in U \cap V \cap A$ n'est pas un élément de $B$, ce qui veut dire $z \in U \cap (A \setminus B)$. On a montré que tout voisinage de $x$ intersecte $A \setminus B$, et donc on a la thèse.

**Exercice 3.** Considérons $L := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ avec $a$, $b \in \mathbb{R}$ fixés et où $\mathbb{R}^2$ est muni de la topologie standard. Déterminer l'adhérence de $L \cap \mathbb{Q}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
*Indication: $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$; i.e. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.*

*Solution.* On rappelle que lorsque la topologie sur $X$ est engendrée par une base, $x \in \bar{A} \subseteq X$ si et seulement si pour tout ouvert de base $U$ avec $x \in U$, $U \cap A \neq \varnothing$. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa distance euclidienne standard $d(x,y) = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{\frac{1}{2}}$, et de la base de la topologie standard de $\mathbb{R}^2$ associée à cette distance.

Si $a = b = 0$ alors $L = \mathbb{R}^2$. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon > 0$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $q \in \mathbb{Q}^2$ tel que $|x_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{2}, i = 1,2$. Alors $d(x,q) < \varepsilon$ et donc $B(x,\varepsilon) \cap (L \cap \mathbb{Q}^2) \neq \varnothing$. Par conséquent, $\overline{L \cap \mathbb{Q}^2} = \mathbb{R}^2$.

Si $b = 0$ et $a \neq 0$ alors $L = \{0\} \times \mathbb{R}$ et donc par un arguement similaire on obtient que $\overline{L \cap \mathbb{Q}^2} = \{0\} \times \mathbb{R}$.

Si $b \neq 0$, la réponse dépend de la pente de la droite $p = -\frac{a}{b}$.

Si $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et si $x \in L$ est tel que $x_1 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, alors $x_2 \notin \mathbb{Q}$, (car sinon $p = \frac{x_2}{x_1} \in \mathbb{Q}$) et donc $L \cap \mathbb{Q}^2 = \{0\}$, ce qui implique que $\overline{L \cap \mathbb{Q}^2} = \{0\}$.

Si $p \in \mathbb{Q}$ alors pour tout $x \in L$ et $\varepsilon > 0$, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $q_1 \in \mathbb{Q}$ avec $|x_1 - q_1| < \min(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2|p|+2})$. Alors $q = (q_1, pq_1) \in L \cap \mathbb{Q}^2$ and $d(x,q) < (\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4})^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$. Par conséquent, $B(x,\varepsilon) \cap L \cap \mathbb{Q}^2 \neq \varnothing$ et donc $L \subseteq \overline{L \cap \mathbb{Q}^2}$. Pour conclure, il suffit de remarquer que $L$ est fermé et donc contient $\overline{L \cap \mathbb{Q}^2}$. On a donc montré que $\overline{L \cap \mathbb{Q}^2} = L$.

**Exercice 4.** Soit $X$ un ensemble totalement ordonné et définissons la *topologie d'ordre* sur $X$, ayant tous les

$$]x, \infty[ := \{y \in X \mid x < y\} \qquad \text{et} \qquad ]{-\infty}, x[ := \{y \in X \mid y < x\}$$

(avec $x \in X$) comme sous-base. Montrer que

(a) les intervalles de la forme $]x,y[ := \{z \in X \mid x < z < y\}$ sont ouverts et les intervalles de la forme $[x,y] := \{z \in X \mid x \leqslant z \leqslant y\}$ sont fermés;

(b) Si $X$ possède un élément minimal $m$, les intervalles de la forme $[m,x[$ sont ouverts et da la même façon, si $X$ possède un élément maximal $M$, les intervalles de la forme $]x,M]$ sont ouverts.

Soit maintenant $X := I^2 = [0,1] \times [0,1]$, muni de la topologie d'ordre lexicographique. Déterminer les adhérences des sous-ensembles suivants de $I^2$:

$A = \{(1/n, 0) \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$,
$B = \{(1 - 1/n, 1/2) \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$,
$C = ]0,1[ \times \{0\}$,
$D = ]0,1[ \times \{1/2\}$,
$E = \{1/2\} \times ]0,1[$.

*Solution.* (a) Il suffit de vérifier que puisque l'ordre est total, $]x, y[=]-\infty, y] \cap [x, \infty[$ et $X \setminus [x, y] =]-\infty, x[ \cup ]y, \infty[$.

(b) Il suffit de remarquer que $[m, x[=]-\infty, x[$ quand $m$ est minimal et que $]x, M] =]x, \infty[$ lorsque $M$ est maximal.

(c) La première chose à remarquer est que les $]x, y[, [(0,0), x[$ et $]x, (1,1)]$ forment une base de la topologie sur $X$, car toute intersection finie non vide d'ouvert de sous base est de cette forme. Pour éviter la redondance du calcul de l'adhérence des ensembles $A$ à $D$, on regroupe certains arguments en resolvant le problème pour $F = S \times \{z\}$ avec $S \subseteq I$ et $z \in I$. Pour tout $x \notin S \times \{z\}$, on a soit $x_1 \notin S$, soit $x_2 \neq z$.

Si $x_2 \neq z$, et $x_2 \neq 0, 1$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon[$ est contenu dans $[0, 1] \setminus \{z\}$. Par conséquent $](x_1, x_2 - \varepsilon), (x_1, x_2 + \varepsilon)[$ est un ouvert qui contient $x$ et qui n'intersecte pas $F$, et donc $x \notin \bar{F}$.

Si $x_1 \notin S$ et $x_2 \neq 0, 1$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon[$ est contenu dans $[0, 1]$. Alors $](x_1, x_2 - \varepsilon), (x_1, x_2 + \varepsilon)[$ est un ouvert qui contient $x$ et qui n'intersecte pas $F$, et donc $x \notin \bar{F}$.

Nous avons donc montré que $\bar{F} \subseteq F \cup ([0, 1] \times \{0, 1\})$.

Supposons $x \notin F$.

- Si $x_2 = 0$, $x_1 \neq 0$, alors $x \notin \bar{F}$ si et seulement s'il existe $0 \leqslant a < x$ tel que $]a, x_1[ \cap S = \varnothing$. En effet, si l'hypothèse est vérifiée, choisissons $\varepsilon = 1$ si $z = 0$ et $0 < \varepsilon < z$ si $z > 0$. Alors $](a, 1), (x_1, \varepsilon)[ \cap F = \varnothing$ et $x \notin \bar{F}$. Si l'hypothèse n'est pas vérifiée, alors pour tout $]y, w[$ contenant $x$, il existe $t \in ]y_1, x_1[ \cap S$ et alors $y < (t, z) < x$. Par conséquent, $]y, w[ \cap E \neq \varnothing$, et donc $x \in \bar{E}$.
- Si $x_2 = 1$, $x_1 \neq 1$, alors $x \notin \bar{E}$ si et seulement s'il existe $x < a \leqslant 1$ tel que $]x_1, a[ \cap S = \varnothing$. En effet, si l'hypothèse est vérifiée, choisissons $\varepsilon = 0$ si $z = 1$ et $z < \varepsilon < 1$ si $z > 0$. Alors $](x_1, \varepsilon), (a, 0)[ \cap E = \varnothing$ et $x \notin \bar{E}$. Si l'hypothèse n'est pas vérifiée, alors pour tout $]y, w[$ contenant $x$, il existe $t \in ]x_1, w_1[ \cap S$ et alors $x < (t, z) < w$. Par conséquent, $]y, w[ \cap E \neq \varnothing$, et donc $x \in \bar{E}$.

On remarque aussi que si $(0, 0), (1, 1)$ ne sont jamais dans $\bar{E} \setminus E$.

En appliquant le critère précédent, on obtient que

$\bar{A} = A \cup \{(0, 1)\}$,

$\bar{B} = B \cup \{(1, 0)\}$,

$\bar{C} = C \cup \{(x, 1) : 0 \leqslant x < 1\} \cup \{(1, 0)\}$,

$\bar{D} = D \cup \{(x, 0) : 0 < x \leqslant 1\} \cup \{(x, 1) : 0 \leqslant x < 1\}$.

Il est relativement aisé de voir que $\bar{E} = \{\frac{1}{2}\} \times [0, 1]$.