TOPOLOGIE - SÉRIE 3

Exercice 1. Considérer $X := \mathbb{R} \amalg \{*\}$ la réunion disjointe de $\mathbb{R}$ et d'un singleton $\{*\}$. Poser

$$\mathcal{B} := \{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{X \setminus M \mid M \subseteq \mathbb{R} \text{ fini}\}.$$

(a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de topologie.

(b) Montrer que pour tout espace topologique Y et tout $y \in Y$ l'ensemble

$$\mathcal{V}(y) := \{N \subseteq Y \mid \text{il existe } V \subseteq Y \text{ ouvert tel que } y \in V \subseteq N\}$$

des voisinages de y forme un filtre.

(c) Montrer que la topologie $\mathcal{T}_\mathcal{B}$ engendrée par $\mathcal{B}$ n'est pas *métrisable*, i.e. il n'y a aucune métrique d sur X telle que $\mathcal{T}_\mathcal{B} = \mathcal{T}_d$.
Indication: Dans un espace métrisable Y tous les $\mathcal{V}(y)$ ont une base de filtre dénombrable.

Preuve. (a) Puisque X est un élément de $\mathcal{B}$, il est clair que tout $x \in X$ appartient à un élément de la base. Soient $A, B \in \mathcal{B}$ deux ouverts de base et $x \in A \cap B$. Si $x \in \mathbb{R}$, alors $x \in \{x\} \subseteq A \cap B$ et $\{x\}$ est un ouvert de base. Si $* \in A \cap B$, alors $A = X \setminus M$ et $B = X \setminus M'$ pour $M, M' \subseteq \mathbb{R}$ finis. Dans ce cas, $* \in X \setminus (M \cup M') = A \cap B$.

(b) Soit $S_x = \{U \subseteq X : x \in U \text{ et } U \text{ ouvert}\}$. Le filtre des voisinages de x est exactement $\mathcal{V}(x) = \mathcal{F}_X(S_x)$, puisque une intersection finie d'ouverts est un ouvert. Par conséquent, $\mathcal{V}(x)$ est bien un filtre par la série 1. On appellera *voisinage de x* les éléments de $\mathcal{V}(x)$.

(c) On remarque qu'un espace métrisable M admet une base dénombrable pour le filtre des voisinage en chaque $x \in M$ donnée par

$$S_x = \left\{ B(x, \frac{1}{n+1}) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Nous allons montrer que $*$ n'admet pas une base dénombrable pour le filtre des voisinages dans X muni de la topologie engendrée par $\mathcal{B}$. Par la remarque précédente, cela suffit à montrer que X n'est pas métrisable.

Par l'absurde, supposons qu'il existe $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base dénombrable de voisinage de $*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $S_n \in \mathcal{V}(*)$, il existe un ouvert de base $X \setminus M_n$ avec $M_n \subseteq \mathbb{R}$ fini qui est inclus dans S_n.

Puisque $S = \{S_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}_X\{X \setminus M_n : n \in \mathbb{N}\}$, on a par l'exercice 4 de la série 1 et par hypothèse que

$$\mathcal{V}(*) = \mathcal{F}_X S \subseteq \mathcal{F}_X\{X \setminus M_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{V}(*).$$

Donc, la collection des $(X \setminus M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme aussi une base du filtre des voisinages de $\mathcal{V}(*)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $X \setminus \{x\}$ est un voisinage de $*$. par conséquent, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$X \setminus (M_0 \cup \ldots \cup M_n) \subseteq X \setminus \{x\},$$

c'est-à-dire tel que $x \in M_0 \cup \ldots \cup M_n$. Par conséquent, $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ et donc $\mathbb{R}$ est dénombrable, une contradiction.

Par conséquent, la topologie sur X engendrée par la base $\mathcal{B}$ n'est pas métrisable. □

Date: 10 octobre 2013

Exercice 2. Montrer que d et d' ci-dessous définissent des métriques sur l'ensemble $C[0,1]$ des fonctions continues de $[0,1]$ à $\mathbb{R}$:

$$d\colon C[0,1]\times C[0,1]\to\mathbb{R},\ (f,g)\mapsto\int_0^1|fx-gx|\,\mathrm{d}x,$$

$$d'\colon C[0,1]\times C[0,1]\to\mathbb{R},\ (f,g)\mapsto\sup_{x\in[0,1]}|fx-gx|\,.$$

De plus, montrer que la topologie $\mathcal{T}_d$ induite par d est strictement moins fine que la topologie $\mathcal{T}_{d'}$ induite par d' (i.e. $\mathcal{T}_d\subsetneq\mathcal{T}_{d'}$).
Indication: Pour l'inégalité, construire une suite de fonctions qui converge par rapport à d mais ne converge pas par rapport à d'.

Preuve. On va montrer que d et d' sont des métriques. Soient $f,g,h:\mathbb{I}\to\mathbb{R}$ des fonctions continues. On a que:

- $d(f,g)=\int_0^1|fx-gx|\,\mathrm{d}x\geq 0$, puisque l'intégrande est positif;
- $d(f,g)=\int_0^1|fx-gx|\,\mathrm{d}x=0\iff|fx-gx|=0$ pour tout $x\in\mathbb{I}\iff fx=gx$ pour tout $x\in\mathbb{I}$;
- $d(f,g)=\int_0^1|fx-gx|\,\mathrm{d}x=\int_0^1|gx-fx|\,\mathrm{d}x=d(g,f)$;
- Pour l'inégalité du triangle, on a que

$$\begin{aligned}d(f,h)=\int_0^1|fx-hx|\,\mathrm{d}x&=\int_0^1|(fx-gx)+(gx-hx)|\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_0^1|(fx-gx)|+|(gx-hx)|\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1|(fx-gx)|\,\mathrm{d}x+\int_0^1|(gx-hx)|\,\mathrm{d}x=d(f,g)+d(g,h).\end{aligned}$$

Donc d est bien une métrique. Ensuite on a que:

- $d'(f,g)=\sup_{x\in[0,1]}|fx-gx|\geq 0$;
- $d'(f,g)=\sup_{x\in[0,1]}|fx-gx|=0\iff|fx-gx|=0$ pour tout $x\in\mathbb{I}\iff fx=gx$ pour tout $x\in\mathbb{I}$;
- $d'(f,g)=\sup_{x\in[0,1]}|fx-gx|=\sup_{x\in[0,1]}|gx-fx|=d'(g,f)$;
- $d'(f,h)=\sup_{x\in[0,1]}|fx-hx|\,\mathrm{d}x=\sup_{x\in[0,1]}|(fx-gx)+(gx-hx)|\leq$
  $\leq\sup_{x\in[0,1]}|(fx-gx)|+|(gx-hx)|\leq$
  $\sup_{x\in[0,1]}|(fx-gx)|+\sup_{x\in[0,1]}|(gx-hx)|=d'(f,g)+d'(g,h)$.

Donc d' est bien une métrique.

De plus, $\mathcal{T}_{d'}$ est plus fine que $\mathcal{T}_d$. En effet, on a l'inégalité:

$$d(f,g)=\int_0^1|fx-gx|\,\mathrm{d}x\leq\int_0^1\sup_{x\in[0,1]}|fx-gx|\,\mathrm{d}x=$$

$$(\sup_{x\in[0,1]}|fx-gx|)(\int_0^1\mathrm{d}x)=d'(f,g)\cdot 1=d'(f,g).$$

Cela signifie que pout tout r réel on a $B_{d'}(f,r)\subseteq B_d(f,r)$, et donc $\mathcal{T}_d\subseteq\mathcal{T}_{d'}$.

Par ailleurs, il existe une suite dans $\mathcal{C}(\mathbb{I})$ qui converge selon $\mathcal{T}_d$, mais pas selon $\mathcal{T}_{d'}$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n(x) = x^n$. Alors on a que

$$d(f_n, 0) = \int_0^1 |f_n x| \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}|_0^1 = \frac{1}{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc $f_n \longrightarrow 0$ selon $\mathcal{T}_d$. Pourtant pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a que

$$d'(f_n, 0) = \sup_{x\in[0,1]} |f_n x| = \sup_{x\in[0,1]} x^n \geq 1^n = 1.$$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 selon $\mathcal{T}_{d'}$. Comme $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{d'}$ et les éspaces métriques sont d'Hausdorff, si la limite existait, il faudrait qu'elle soit égale à 0. Donc la suite ne converge pas dans $\mathcal{T}_{d'}$, et $\mathcal{T}_d \not\supset \mathcal{T}_{d'}$. $\square$

Exercice 3. Considérer les topologies suivantes sur $\mathbb{R}$:

- $\mathcal{T}_1$ = la topologie standard;
- $\mathcal{T}_2$ = la topologie de $\mathbb{R}_K$, dont une base est donnée par les intervalles ouverts ordinaires et les $]a, b[\setminus K$ où a, $b \in \mathbb{R}$ et $K := \{1/n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$;
- $\mathcal{T}_3$ = la topologie du complément fini où $U \subseteq \mathbb{R}$ est ouvert ssi $U = \varnothing$ ou $\mathbb{R} \setminus U$ est fini;
- $\mathcal{T}_4$ = la topologie de la limite supérieure, avec les intervalles $]a, b]$ comme base;
- $\mathcal{T}_5$ = la topologie avec tous les intervalles $]-\infty, a[$ comme base.

Pour chacune, déterminer lesquelles des autres topologies elle contient.

Solution. Le diagrame suivant exprime les (seules!) inclusions que on a entre les topologies données.

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{T}_4 & \\
& \mathcal{T}_2 \arrow[u, hook] & \\
& \mathcal{T}_1 \arrow[u, hook] & \\
\mathcal{T}_3 \arrow[ur, hook] & & \mathcal{T}_5 \arrow[ul, hook]
\end{tikzcd}$$

On va le montrer.

- $[\mathcal{T}_3 \subset \mathcal{T}_1]$: pour $x_1 < \cdots < x_n \in \mathbb{R}$ on peut écrir

$$\mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\} = (-\infty, x_1) \cup (x_1, x_2) \cup \cdots \cup (x_{n-1}, x_n) \cup (x_n, \infty);$$

- $[\mathcal{T}_5 \subset \mathcal{T}_1]$: c'est claire;
- $[\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2]$: c'est claire;
- $[\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_4]$: puisque $\mathbb{R} \setminus K = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty) \cup (\bigcup_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}))$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on peut écrir

$$(a, b) \setminus K = ((\bigcup_{n=0}^{+\infty} (-n, 0]) \cup (\bigcup_{n,m=0}^{+\infty} (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} - \frac{1}{mn}]) \cup (\bigcup_{n=0}^{+\infty} (1, n])) \cap (\bigcup_{n=0}^{+\infty} (a, b - \frac{1}{n}]),$$

ce qui est ouvert dans $\mathcal{T}_4$;

- $[\mathcal{T}_4 \not\subset \mathcal{T}_2]$: tout ouvert de $\mathcal{T}_4$ qui contient -1 doit contenir $(-1, -1+\varepsilon)$ pour quelque $\varepsilon > 0$. Donc $(-2, -1]$ n'est pas ouvert;
- $[\mathcal{T}_2 \not\subset \mathcal{T}_1]$; tout ouvert de $\mathcal{T}_1$ qui contient 0 doit contenir $(0, \varepsilon)$ pour quelque $\varepsilon > 0$. Donc $(-1, 1) \setminus \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas ouvert;
- $[\mathcal{T}_3 \not\subset \mathcal{T}_5]$: c'est claire;
- $[\mathcal{T}_5 \not\subset \mathcal{T}_3]$: c'est claire.

Exercice 4. Pour un ensemble X, montrer que les

$$M^{\uparrow} = \uparrow\mathcal{F}_X\{M\} = \{\mathcal{F} \in \mathrm{Flt}(X) \mid M \in \mathcal{F}\}$$

avec $M \subseteq X$ forment une base de topologie sur $\mathrm{Flt}(X)$. De même, pour un ensemble partiellement ordonné P, montrer que les

$$\uparrow p := \{x \in P \mid p \leqslant x\}$$

avec $p \in P$ forment une base de topologie sur P.

Preuve.

- Nous allons montrer que les

  $$M^{\uparrow} = \uparrow\mathcal{F}_X\{M\} = \{\mathcal{F} \in \mathrm{Flt}(X) \mid M \in \mathcal{F}\}$$

  avec $M \subseteq X$ forment une base de topologie sur $\mathrm{Flt}(X)$.
  Le filtre $\mathcal{F}_X\{X\}$ est le filtre trivial $\{X\}$ qui est le filtre minimal pour l'inclusion. Par conséquent, $X^{\uparrow} = \mathrm{Flt}(X)$ et donc tout filtre appartient à un ouvert de base.
  Vérifions maintenant la seconde condition. Soient $M_1, M_2 \subseteq X$, et montrons que

  $$(M_1 \cap M_2)^{\uparrow} = M_1^{\uparrow} \cap M_2^{\uparrow}.$$

  Soit $\mathcal{F} \in (M_1 \cap M_2)^{\uparrow}$. Alors par définition, $M_1 \cap M_2 \in \mathcal{F}$. Puisque $\mathcal{F}$ est un filtre et donc clos par extension, $M_1, M_2 \in \mathcal{F}$ et donc $\mathcal{F} \in M_1^{\uparrow} \cap M_2^{\uparrow}$. Supposons que $\mathcal{F} \in M_1^{\uparrow} \cap M_2^{\uparrow}$. Alors $M_1 \cap M_2 \in \mathcal{F}$ puisque $\mathcal{F}$ est clos par intersection finies.
- Puisque pour tout $x \in P$, $x \leqslant x$, on a toujours que $x \in \uparrow x$, et donc tout $x \in P$ appartient à un ouvert de base.
  Soient $z \in \uparrow x \cap \uparrow y$ avec $x, y, z \in P$. Alors par transitivité de l'ordre, $\uparrow z \subseteq \uparrow x \cap \uparrow y$, ce qui conclut la preuve que les

  $$\uparrow p = \{x \in P \mid p \leqslant x\}$$

  avec $p \in P$ forment une base de topologie sur P. □