TOPOLOGIE - SÉRIE 2

Exercice 1. Pour un espace topologique X et $M \subseteq X$, montrer que M est ouvert si et seulement si pour tout $x \in M$ il existe un ouvert $U \subseteq X$ tel que $x \in U \subseteq M$.

Preuve. Le sens direct est évident, il suffit de prendre $U = M$ pour tout $x \in X$. Supposons en revanche que pour tout $x \in M$, il existe un ouvert U_x tel que $x \in U_x \subseteq M$. Alors $\bigcup_{x \in M} U_x = M$ qui est donc ouvert comme réunion d'ouverts. $\square$

Exercice 2. On définit une topologie sur $\mathbb{Z}$ (appelé la *topologie des entiers uniformément espacés*) comme suit:

$$U \subseteq \mathbb{Z} \text{ est ouvert } :\Leftrightarrow \ U \text{ est une réunion d'ensembles de la forme } a\mathbb{Z} + b$$

(où a, $b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ et où $a\mathbb{Z} + b = \{ax + b \mid x \in \mathbb{Z}\}$). Montrer que

(a) c'est vraiment une topologie sur $\mathbb{Z}$;

(b) les $a\mathbb{Z} + b$ avec a, $b \in \mathbb{Z}$ sont fermés (i.e. leurs compléments sont ouverts) et ouverts (*clopen* en anglais);

(c) $\mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\} = \bigcup_{p \text{ prime}} (p\mathbb{Z} + 0)$ et donc, en notant qu'un ensemble non vide et fini $U \subseteq \mathbb{Z}$ n'est pas ouvert, qu'il y a une infinité des nombres premiers.

Preuve.

(a) Il s'agit de vérifier que l'ensemble des $a\mathbb{Z} + b$ forme une base de topologie. Puisque $\mathbb{Z} = 1\mathbb{Z} + 0$, tout entier appartient à un ouvert de base. De plus, si $x \in (a\mathbb{Z} + b \cap a'\mathbb{Z} + b')$, alors $x \in aa'\mathbb{Z} + x \subseteq (a\mathbb{Z} + b) \cap (a'\mathbb{Z} + b')$.

(b) Si le reste dans la division de b par a est r, alors

$$a\mathbb{Z} + b = \mathbb{Z} \setminus \left(\bigcup_{\substack{i=0,\ldots,a-1 \\ i \neq r}} a\mathbb{Z} + i \right),$$

ce qui montre que $a\mathbb{Z} + b$ est fermé.

(c) L'égalité d'ensembles provient du fait que tout entier différent de $-1, 1$ est divisible par un nombre premier.

Supposons par l'absurde qu'il existe seulement un nombre fini de nombres premiers. Alors $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$ est une union finie de fermés, donc un fermé, ce qui implique que $\{-1, 1\}$ est un ouvert non vide.

Il suffit donc de montrer que tout ouvert non vide est infini pour obtenir une contradiction. Or tout ouvert non vide contient un ensemble de la forme $a\mathbb{Z} + b$, qui est en bijection avec $\mathbb{Z}$ et donc infini. $\square$

Exercice 3. Vrais ou faux?

(a) Un espace topologique est discret (i.e. chaque $U \subseteq X$ est ouvert) si et seulement si chaque singleton $\{x\} \subseteq X$ est ouvert.

(b) Pour un espace topologique fini X, si tout singleton $\{x\} \subseteq X$ est fermé (i.e. $X \setminus \{x\} \subseteq X$ est ouvert) alors la topologie sur X est la topologie discrète (i.e. tout $U \subseteq X$ est ouvert).

Date: 4 octobre 2013

(c) Et pour X dénombrable?

Preuve.

(a) OUI. En effet, c'est claire que si tout sous-ensemble est ouvert les singletons le sont. Ensuite, on peut écrire tout sous-ensemble comment une réunion de singletons, et donc si les singletons sont ouvert la topologie est discrète.

(b) OUI. En effet, si $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors pour tout $i = 1, \ldots, n$ on a que

$$\{x_i\} = \bigcap_{j \neq i} X \setminus \{x_j\},$$

qui est ouvert.

(c) NON. Considerons $\mathbb{N}$ avec la topologie **cofinie** (i.e., les ouverts sont tous et seules les compléments de sous-ensembles finis et $\varnothing$). Alors par définition les singletons sont fermés, mais la topologie n'est pas discrète, comme $\{0, 1\} \subseteq \mathbb{N}$ n'est pas ouvert. $\square$

Pour un ensemble X, notons $\mathrm{UFlt}(X)$ l'ensemble des ultrafiltres sur X.

Exercice 4. Pour un ensemble X, un $S \subseteq \mathrm{UFlt}(X)$ est appelé *fermé* ssi $S = \varnothing$ ou

$$\bigcap_{\mathcal{F} \in S} \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U} \qquad \text{implique} \qquad \mathcal{U} \in S \qquad \text{pour tout ultrafiltre } \mathcal{U} \text{ sur } X.$$

En prenant comme ouverts les compléments des fermés, montrer que ça définit une topologie sur $\mathrm{UFlt}(X)$ (que l'on appelle la *topologie de Zariski*).

Preuve. On va montrer que ça définit une topologie.

- Soit $\{\mathrm{UFlt}(X) \setminus S_i\}_{i \in I}$ une famille d'ouverts dans $\mathrm{UFlt}(X)$. Supposons que

  $$\bigcap_{\mathcal{F} \in \bigcap_{i \in I} S_i} \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}.$$

  Alors pour tous $i \in I$ on a

  $$\bigcap_{\mathcal{F} \in S_i} \mathcal{F} \subseteq \bigcap_{\mathcal{F} \in \bigcap_{i \in I} S_i} \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U},$$

  ce qui donne $\mathcal{U} \in S_i$, et finalement $\mathcal{U} \in \bigcap_{i \in I} S_i$. Donc $\bigcap_{i \in I} S_i$ est fermé et finalement $\bigcup_{i \in I} (\mathrm{UFlt}(X) \setminus S_i) = \mathrm{UFlt}(X) \setminus (\bigcap_{i \in I} S_i)$ est ouvert.
- Soient S_1 et S_2 deux fermés. On va montrer que $S_1 \cup S_2$ est fermé, d'où l'ensemble

  $$UFlt(X) \setminus (S_1 \cup S_2) = (UFlt(X) \setminus S_1) \cap (UFlt(X) \setminus S_1)$$

  est ouvert. La même preuve marche pour un nombre fini de fermés $S_1, \ldots, S_n$.
  Supposons par contradiction que

  $$\bigcap_{\mathcal{F} \in S_1 \cup S_2} \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U} \text{ mais } \mathcal{U} \notin S_1 \cup S_2.$$

  Puisque S_1 et S_2 sont fermés, on deduit que pour $i = 1, 2$

  $$\bigcap_{\mathcal{F} \in S_i} \mathcal{F} \not\subseteq \mathcal{U},$$

  et cela signifie qu'il existe $Y_i \subseteq X$, $Y_i \in \mathcal{F}$ pour tous $\mathcal{F} \in S_i$ tel que $Y_i \notin \mathcal{U}$. Alors $Y_1 \cup Y_2 \in \mathcal{F}$ pour tout $\mathcal{F} \in S_1 \cup S_2$, c'est à dire

  $$Y_1 \cup Y_2 \in \bigcap_{\mathcal{F} \in S_1 \cup S_2} \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}.$$

  Mais $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre, donc il faut qu'un entre Y_1 et Y_2 soit un élément de $\mathcal{U}$, ce qui est une contradiction. $\square$