UNE AUTRE PREUVE DU THÉORÈME D'ASCOLI

On m'a dit qu'il y avait une toute autre preuve du résultat d'Ascoli ce qui est plus courte, plus élégante et ce qui peut être faite avec des filtres ! Le contexte pour ce document c'est que l'on a un espace métrique (Y, d) et un espace compact X. On considère l'ensemble Y^X muni de la topologie uniforme. On note par Y^X_{uni} l'ensemble Y^X muni de cette topologie. On aura besoin de la topologie produit sur l'ensemble Y^X que l'on note simplement par Y^X.

Définition 1. Un sous-ensemble $\mathcal{F} \subseteq C_{uni}(X, Y)$ est dit **équicontinu** si pour tout $\epsilon > 0$ et tout $x \in X$ il existe un ouvert U tel que $x \in U$ et pour tout $y \in U$ et tout $f \in \mathcal{F}$ on ait que $d(f(x), f(y)) < \epsilon$.

En fait on ne va faire qu'une implication du théorème d'Ascoli, la preuve que je vous ai donnée pour l'autre implication n'était pas si terrible.

Théorème 2 (Théorème d'Ascoli)**.** *Si $\mathcal{F} \subseteq C_{uni}(X, Y)$ est équicontinu et pour tout $x \in X$ le sous-ensemble $\mathcal{F}_x = \{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\} \subseteq Y$ a une adhérence compacte, alors $\overline{\mathcal{F}} \subseteq C_{uni}(X, Y)$ est compact.*

Preuve. Soit $i : Y^X_{uni} \to Y^X$ l'identité (i est continue). Considérons l'image $i(\mathcal{F})$. Par hypothèse et le théorème de Tychonoff, $\mathcal{G} = \overline{i(\mathcal{F})} \subseteq \prod_{x \in X} \overline{\mathcal{F}_x} \subseteq Y^X$ est compact. On va montrer que $i^{-1}(\mathcal{G})$ est aussi compact et on pourra en déduire que $\overline{\mathcal{F}} \subseteq i^{-1}(\mathcal{G})$ est compact.

Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $i^{-1}(\mathcal{G})$. Il faut démontrer que $\mathcal{U}$ a un point limite. Par hypothèse,

$$i_*(\mathcal{U}) = \{A \subseteq \mathcal{G} \mid i^{-1}(A) \in \mathcal{U}\}$$

a un point limite (c'est un ultrafiltre sur le compact $\mathcal{G}$), disons $i_*(\mathcal{U}) \to g \in \mathcal{G}$. Soit $B_{uni}(g, \epsilon)$ la boule autour de g de rayon ϵ donnée par la métrique uniforme. Il suffit de montrer que $B_{uni}(g, \epsilon) \in \mathcal{U}$.

Pour tout $x \in X$ il existe un ouvert U_x qui contient x et tel que pour tout $y \in U_x$ et tout $f \in \mathcal{F}$ on ait que $d(f(y), f(x)) < \epsilon/4$. Par continuité de l'application $Y^X \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f \mapsto d(f(y), f(x)),$$

on a (presque) la même inégalité pour tout $f \in i^{-1}(\mathcal{G})$, c-à-d $d(f(y), f(x)) \leq \epsilon/4$ pour tout $f \in i^{-1}(\mathcal{G})$ Puisque X est compact, $X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$.

On pose $V = \bigcap_{i=1}^n pr_{x_i}^{-1}(B(g(x_i), \epsilon/4))$, ce qui est un ouvert dans Y^X qui contient g et alors $i^{-1}(V) \in \mathcal{U}$ (ce qui est équivalent à $V \in i_*(\mathcal{U})$). Soient $f \in i^{-1}(V)$ et $x \in U_{x_i}$. Alors, on a que

$$d(f(x), g(x)) \leq d(f(x), f(x_i)) + d(f(x_i), g(x_i)) + d(g(x_i), g(x)) \leq 3\epsilon/4.$$

Puisque X est couvert par les ouverts U_{x_i}, on a que

$$\sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) \leq 3\epsilon/4 < \epsilon$$

pour tout $f \in i^{-1}(V)$. Autrement dit, $i^{-1}(V) \subseteq B_{uni}(g, \epsilon)$. Finalement, $i^{-1}(V) \in \mathcal{U}$ et on conclut que $B_{uni}(g, \epsilon) \in \mathcal{U}$ aussi. Alors, $\mathcal{U} \to g$ et $i^{-1}(\mathcal{G})$ est compact.

□