Topologie algébrique
Série 4

13.03.2017

L'exercice 4 est à rendre le 21.03.2017.

1. Soit $0 \to C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \to 0$ une courte suite exacte de complexes de chaînes. Montrer que
$$\ker(\partial_{n+1} : H_{n+1}C'' \to H_n C') = \mathrm{Im}(H_{n+1}g : H_{n+1}C \to H_{n+1}C'')$$
et
$$\mathrm{Im}(\partial_{n+1} : H_{n+1}C'' \to H_n C') = \ker(H_n f : H_n C' \to H_n C)$$
pour tout $n \geq 0$.

2. (Topologie de polytopes) Soit $\mathcal{K}$ un complexe simplicial.
   (a) Montrer que $|\mathcal{K}|$ est de Hausdorff.
   (b) Montrer que si $\mathcal{K}$ est fini, alors $|\mathcal{K}|$ est compact.
   (c) Montrer que si A un sous-espace compact de $|\mathcal{K}|$, alors il existe un sous-complexe fini $\mathcal{K}'$ de $\mathcal{K}$ tel que $A \subseteq |\mathcal{K}'|$.

3. (Complexes simpliciaux abstraits)

   Definition 1. Un *complexe simplicial abstrait* consiste en une collection $\mathcal{S}$ d'ensembles nonvides telle que si $\sigma \in \mathcal{S}$, alors $\tau \in \mathcal{S}$ pour tout $\emptyset \neq \tau \subset \sigma$. Un élément $\sigma \in \mathcal{S}$ est un *simplexe* de $\mathcal{S}$. Un simplexe σ de cardinalité $n+1$ est un *n-simplexe* de $\mathcal{S}$; l'ensemble des n-simplexes de $\mathcal{S}$ est noté $\mathcal{S}_n$. Si $\emptyset \neq \tau \subset \sigma$, alors τ est une *face* de σ. Deux complexes simpliciaux abstraits $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont *isomorphes* s'il y a une bijection $\alpha : \mathcal{S}_0 \to \mathcal{S}'_0$ induisant des bijections $\mathcal{S}_n \to \mathcal{S}'_n$ pour tout n.

   (a) Soit $\mathcal{K}$ un complexe simplicial géométrique. Soit $\mathcal{S}(\mathcal{K})$ la collection d'ensembles
   $$\mathcal{S}(\mathcal{K}) = \Big\{\{v_0, ..., v_n\} \mid \big\{\{v_0\}, ..., \{v_n\}\big\} \subset \mathcal{K}_0 \text{ et } [v_0, ..., v_n] \in \mathcal{K}_n, n \geq 0\Big\}.$$
   Montrer que $\mathcal{S}(\mathcal{K})$ est un complexe simplicial abstrait.

(b) Montrer que pour tout complexe simplicial abstrait $\mathcal{S}$, il existe un complexe simplicial géométrique $\mathcal{K}_{\mathcal{S}}$ tel que $\mathcal{S}$ soit isomorphe à $\mathcal{S}(\mathcal{K}_{\mathcal{S}})$.

4. (Construction de complexes simpliciaux par recollement) Soient $\mathcal{K}$ un complexe simplicial and W un ensemble, et soit $\rho : \mathcal{K}_0 \to W$ une application surjective, appelé un *étiquettage* des sommets de $\mathcal{K}$. Soit $\mathcal{S}(\rho)$ la collection d'ensembles

$$\mathcal{S}(\rho) = \big\{\{\rho(v_0), ..., \rho(v_n)\} \mid [v_0, ..., v_n] \in \mathcal{K}_n, n \geq 0\big\}.$$

(Observer que la cardinalité de $\{\rho(v_0), ..., \rho(v_n)\}$ peut être inférieur à $n+1$, car ρ n'est pas forcément injective.)

(a) Montrer que $\mathcal{S}(\rho)$ est un complexe simplicial abstrait.

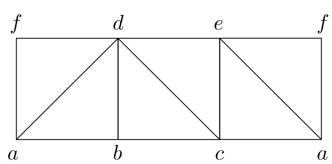
(b) Montrer que l'application $\mathcal{K}_0 \to \mathcal{S}(\rho)_0$ induite par ρ s'étend en une application continue et surjective

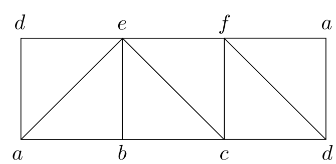
$$\widehat{\rho} : |\mathcal{K}| \to |\mathcal{K}_{\mathcal{S}(\rho)}|.$$

On appelle le complexe simplicial $\mathcal{K}_{\mathcal{S}(\rho)}$ le *recollement de* $\mathcal{K}$ *selon* ρ.

(c) Montrer que $\widehat{\rho}$ est une application quotient et que l'on peut donc voir $|\mathcal{K}_{\mathcal{S}(\rho)}|$ comme un espace quotient de $|\mathcal{K}|$. Quelle est la relation d'équivalence associée sur $|\mathcal{K}|$?

(d) Pour les étiquettages suivants, dire quels sont les espaces obtenus par recollement.





(e) Trouver un étiquettage dont l'espace obtenu par recollement est homéomorphe au tore.