Topologie algébrique
Série 3

06.03.2017

L'exercice 3 est à rendre le 14.03.2017.

1. Soient C et C' des complexes de chaînes. Montrer que la relation "il existe une homotopie de chaînes" est une relation d'équivalence sur $\mathsf{Ch}(C, C')$.

2. Deux complexes de chaînes C et C' *ont le même type d'homotopie* s'il existe des morphismes de complexes de chaînes $f : C \to C'$ et $g : C' \to C$ tels que $gf \simeq \mathrm{Id}_C$ et $fg \simeq \mathrm{Id}_{C'}$.

   (a) Montrer que si deux complexes de chaînes ont le même type d'homotopie, alors leurs groupes d'homologie sont isomorphes.

   (b) Montrer que si C et C' ont le même type d'homotopie, et $\widetilde{C}$ et $\widetilde{C}'$ ont le même type d'homotopie, alors $C \oplus \widetilde{C}$ et $C' \oplus \widetilde{C}'$ ont le même type d'homotopie.

   (c) Donner deux exemples de couples de complexes de chaînes qui ont le même type d'homotopie, mais qui ne sont pas isomorphes.

   (d) Donner un exemple d'un couple de complexes de chaînes qui ont les mêmes groupes d'homologie, mais pas le même type d'homotopie.

3. (Suite exacte de Mayer-Vietoris) Soit C un complexe de chaînes, et soient C', C'' des sous-complexes de C tel que $C_n = C'_n + C''_n$ (somme non forcément directe!) pour tout n. Montrer que $C' \cap C''$ est aussi un sous-complexe de C. Trouver une longue suite exacte qui met en relation les groupes d'homologie de C, de $C' \oplus C''$, et de $C' \cap C''$.

4. (Le lemme du serpent) Soit

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r] & N \arrow[r] & N'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

   un diagramme commutatif de morphismes dans Ab, où chaque ligne est exacte. Montrer qu'il y a une suite exacte induite

$$0 \to \ker f' \to \ker f \to \ker f'' \to \operatorname{coker} f' \to \operatorname{coker} f \to \operatorname{coker} f'' \to 0.$$