Topologie algébrique
Série 2

27.02.2017

L'exercice 2 est à rendre le 07.03.2017.

1. Soient $G : \mathsf{Set} \to \mathsf{Top}$ et $D : \mathsf{Set} \to \mathsf{Top}$ les foncteurs qui munissent un ensemble de sa topologie grossière et de sa topologie discrète, respectivement. Soit $U : \mathsf{Top} \to \mathsf{Set}$ le foncteur oubli. Montrer qu'il y a des transformations naturelles $DU \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathsf{Top}} \Rightarrow GU$.

2. Démontrer que pour tout ensemble X et tout groupe abélien $(A, +, 0)$, il y a une bijection
$$\mathsf{Ab}\big(F_{Ab}(X), (A, +, 0)\big) \cong \mathsf{Set}\big(X, U(A, +, 0)\big),$$
où $U : \mathsf{Ab} \to \mathsf{Set}$ est le foncteur oubli. Autrement dit, tout homomorphisme de groupes abéliens dont la source est $F_{Ab}(X)$ est entièrement déterminé par sa restriction à l'ensemble de générateurs X.

3. Soient $\varphi, \psi : G \to H$ des homomorphismes de groupe. Quelles sont les transformations naturelles de $B\varphi$ vers $B\psi$? Montrer qu'elles sont toutes des isomorphismes naturels.

4. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des catégories.
   (a) Si $\mathcal{C}$ est petite, montrer qu'il y a une catégorie $\mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ dont les objets sont les foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ et dont les morphismes sont les transformations naturelles entre de les foncteurs.
   (b) Soit G un groupe, et soit $G\mathsf{Set}$ la catégorie dont les objets sont les ensembles munis d'une action de G et les morphismes sont des applications ensemblistes G-équivariantes. Montrer qu'il y a un isomorphisme de catégories entre $G\mathsf{Set}$ et $\mathsf{Fun}(\mathsf{B}G, \mathsf{Set})$.
   (c) Si $\mathcal{E}$ est encore une catégorie, et $\mathcal{D}$ est aussi petite, montrer que la catégorie $\mathsf{Fun}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}, \mathcal{E})$ est équivalente à $\mathsf{Fun}\big(\mathcal{C}, \mathsf{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{E})\big)$.

5. Si $C = (C_*, d_*)$ et $C' = (C'_*, d'_*)$ sont des complexes de chaînes, leur *somme directe* $C \oplus C'$ est le complexe de chaînes défini par $(C \oplus C')_n = C_n \oplus C'_n$ pour tout n, avec différentielle

$$d''_n : C_n \oplus C'_n \to C_{n-1} \oplus C'_{n-1} : c + c' \mapsto d_n c + d'_n c'.$$

Montrer que $H_n(C \oplus C') \cong H_n(C) \oplus H_n(C')$ (en tant que groupes abéliens) pour tout $n \in \mathbb{Z}$.