Topologie algébrique
Série 14

29.05.2017

L'exercice 3 peut être rendu pour un bonus le 06.06.2017.

1. (Suites exactes et produits tensoriels) Soit $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ une courte suite exacte de groupes abéliens. Soit H un groupe abélien.
   (a) Montrer que la suite $0 \to A \otimes H \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}_H} B \otimes H \xrightarrow{g \otimes \mathrm{Id}_H} C \otimes H \to 0$ est exacte si H est abélien libre ou si C est abélien libre.
   (b) Montrer que $f \otimes \mathrm{Id}_H : A \otimes H \to B \otimes H$ n'est pas injectif en général.
2. Démontrer les propriétés suivantes de Tor, pour tout groupe abélien G.
   (a) La définition de $\mathrm{Tor}(G, H)$ est indépendante (à isomorphisme près) de la résolution de G choisie.
   (b) $\mathrm{Tor}(G, H) \cong \mathrm{Tor}(H, G)$ pour tout groupe abélien H.
   (c) $\mathrm{Tor}(G, -)$ s'étend en un foncteur $\mathsf{Ab} \to \mathsf{Ab}$.
   (d) $\mathrm{Tor}(G, \mathbb{Z}) = 0$.
   (e) $\mathrm{Tor}(G, \bigoplus_{j \in \mathcal{J}} H_j) \cong \bigoplus_{j \in \mathcal{J}} (G, H_j)$ pour toute famille de groupes abéliens $\{H_j \mid j \in \mathcal{J}\}$.
3. (Analyse d'homologie caractéristique par caractéristique)
   (a) Montrer que $\widetilde{H}_n X = 0$ pour tout n si et seulement si $\widetilde{H}_n(X; \mathbb{Q}) = 0$ et $\widetilde{H}_n(X; \mathbb{F}_p) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout premier p.
   (b) Montrer qu'une application continue $f : X \to Y$ est telle que $H_n f$ est un isomorphisme pour tout n si et seulement si $\widetilde{H}_n(f; \mathbb{Q})$ et $\widetilde{H}_n(f; \mathbb{F}_p)$ sont des isomorphismes pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout premier p.
4. Calculer
   (a) $H_*(\mathbb{C}P^m; A)$, où A est un groupe abélien quelconque,
   (b) $H_*(\mathbb{R}P^m; \mathbb{F}_p)$ où p est un nombre premier,

(c) $H_*(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Q})$.

(d) $H_*(\mathbb{C}P^m \times \mathbb{C}P^n)$,

(e) $H_*(\mathbb{R}P^m \times \mathbb{R}P^n)$, et

(f) $H_*(\mathbb{R}P^m \times \mathbb{R}P^n; \mathbb{F}_2)$.