Topologie algébrique
Série 13

22.05.2017

L'exercice 3 est à rendre le 30.05.2017.

1. (CW-complexes) Supposons que X_0 soit un espace discret, et que, pour tout $n \geq 1$, un espace X_n soit construit par attachement de n-cellules (i.e., disques D^n) à X_{n-1}. Poser $X = \bigcup_{n \geq 0} X_n$ et supposons que sa topologie vérifie la condition suivante: $A \subset X$ est fermé si et seulement si $A \cap X_n$ est fermé dans X_n pour tout n. (On dit alors que X est un *CW-complexe*, et $C(\mathcal{F})$ est appelé le *complexe cellulaire* de X, où $\mathcal{F}$ est la filtration évidente de X.)

   (a) Montrer que $H_k(X_n, X_{n-1}) = 0$ si $k \neq n$ et que $H_n(X_n, X_{n-1})$ est abélien libre sur une base formée des n-cellules de X_n.

   (b) Montrer que $H_k X_n = 0$ pour tout $k > n$ et que l'inclusion $X_n \hookrightarrow X$ induit des isomorphismes $H_k X_n \cong H_k X$ pour tout $k < n$. Conclure que $H_n C(\mathcal{F}) \cong H_n X$ pour tout n.

   (c) Montrer que si X est un CW-complexe qui n'a aucune n-cellule, alors $H_n X = 0$.

   (d) Calculer $H_*(S^m \times S^n)$.

2. (Espaces de Moore)

   (a) Soient $m > 0$ et $n \geq 1$. Construire par attachement de cellule un espace topologique $M(\mathbb{Z}/m, n)$ (appelé un *espace de Moore*) tel que

$$\widetilde{H}_k^{\text{sing}}\big(M(\mathbb{Z}/m, n)\big) = \begin{cases} \mathbb{Z}/m & : k = n \\ 0 & : \text{sinon.} \end{cases}$$

   (b) Etant donné une suite $G_1, G_2, ..., G_n, ...$ de groupes abéliens de génération finie, construire un espace topologique X tel que

$$\widetilde{H}_k^{\text{sing}}(X) = \begin{cases} 0 & : k = 0 \\ G_k & : k > 0. \end{cases}$$

3. (Espaces projectifs réels) Soit $\mathbb{R}P^n$ l'*espace projectif réel de dimension* n, i.e., l'espace des droites dans $\mathbb{R}^{n+1}$ qui passent par l'origine. Plus explicitement, $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}/\sim$, où

$$x \sim x' \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } x = \lambda x'.$$

   (a) Montrer que $\mathbb{R}P^n \cong S^n/\sim$, où $x \sim -x$ pour tout $x \in S^n$.

   (b) Montrer que $\mathbb{R}P^n$ est compact et de Hausdorff.

   (c) Montrer que l'inclusion $\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2} \smallsetminus \{0\}$ induit une inclusion $\mathbb{R}P^n \hookrightarrow \mathbb{R}P^{n+1}$.

   (d) Montrer que $\mathbb{R}P^0$ est un singleton et que $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$.

   (e) Montrer que $\mathbb{R}P^n$ est obtenu à partir de $\mathbb{R}P^{n-1}$ en attachant D^n le long de l'application quotient $S^{n-1} \to \mathbb{R}P^{n-1}$.

   (f) Calculer $\widetilde{H}_k^{\text{sing}}(\mathbb{R}P^n)$ pour tout n et tout k. (Attention à la différence entre les cas n pair et n impair!)

4. (Relation entre homologie simpliciale et homologie singulière) Soit $\mathcal{K}$ un complexe simplicial.

   (a) Soient $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ deux sous-complexes de $\mathcal{K}$ tels que $\mathcal{L} \cup \mathcal{L}' = \mathcal{K}$. Montrer que $\big(|\mathcal{K}|; |\mathcal{L}_1|, |\mathcal{L}_2|\big)$ est un triplet excisif.

   (b) Pour tout $n \geq 0$ et n'importe quelle orientation $<$ de $\mathcal{K}$, considérer l'homomorphisme $\psi_n : C_n(\mathcal{K}, <) \to S_n\big(|\mathcal{K}|\big)$ spécifié par

$$\psi(v_0, ..., v_n) : \Delta^n \to |\mathcal{K}| : (t_0, ..., t_n) \mapsto \sum_{i=0}^{n} t_i v_i.$$

   Poser $\psi = (\psi_n)_{n \geq 0}$. Montrer que $\psi : C_*(\mathcal{K}, <) \to S_*\big(|\mathcal{K}|\big)$ est un morphisme de complexes de chaînes.

   (c) Par récurrence sur le nombre de simplexes de $\mathcal{K}$, montrer que $H_n\psi$ est un isomorphisme pour tout n, si $\mathcal{K}$ est fini.

   (d) Utilisant que pour tout sous-espace compact X de $|\mathcal{K}|$, il existe un sous-complexe fini $\mathcal{L}$ tel que $X \subseteq |\mathcal{L}|$, démontrer que $H_n\mathcal{K} \cong H_n^{\text{sing}}|\mathcal{K}|$ pour tout complexe simplicial $\mathcal{K}$.