Topologie algébrique
Série 11

08.05.2017

L'exercice 2 est à rendre le 16.05.2017.

1. (Subdivision géométrique)

   (a) Montrer que si $\sigma = [v_0, ..., v_m]$ est un m-simplexe géométrique dans $\mathbb{R}^n$, alors
   $$\operatorname{diam}\sigma = \max\big\{||v_i - v_j|| \mid 0 \leq i < j \leq m\big\}.$$

   (b) Soit $\mathcal{K}$ un complexe simplicial de dimension n. Montrer que
   $$\mu(\operatorname{sd}\mathcal{K}) \leq \frac{n}{n+1}\mu(\mathcal{K}),$$
   où μ désigne la maille du complexe simplicial.

   (c) Montrer que $\operatorname{sd}\mathcal{K}(\Delta^n)$ a exactement $(n+1)!$ n-simplexes.

2. (Construction d'une transformation naturelle à partir d'une famille de chaînes) Le but de cet exercice est de comprendre le principe général derrière la construction de la transformation naturelle $\mathrm{Sd}_*^{(-)} : S_*^\varepsilon \to S_*^\varepsilon$ vue au cours.

   Soit $\mathcal{A} = \{a_n \in S_n(\Delta^n) \mid n \geq 0\}$, un ensemble de chaînes singulières quelconques. Pour tout $n \geq 0$ et tout espace X, définir un homomorphisme
   $$\alpha_n^X : S_n(X) \to S_n(X)$$
   par $\alpha_n^X(\varphi) = S_n(\varphi)(a_n)$ pour tout $\varphi : \Delta^n \to X$.

   (a) Montrer que $\alpha_n^{(-)} : S_n(-) \Rightarrow S_n(-)$ est une transformation naturelle.

   (b) Montrer que si
   $$d_n a_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k S_{n-1}(\partial_{n-1}^k)(a_{n-1})$$

pour tout $n \geq 1$, alors $\alpha_*^X : S_*(X) \to S_*(X)$ est un morphisme de complexes de chaînes pour tout espace topologique X. Conclure qu'il y a une homotopie de chaînes naturelle entre α_*^X et $\mathrm{Id}_{S_*(X)}$ pour tout X.

(c) Montrer que l'ensemble $\{c_n \in S_n(\Delta^n) \mid n \geq 0\}$ des chaînes de subdivision vérifie la condition du point (b). (Ce calcul était fait au cours, mais je pense qu'il n'est pas inutile de le refaire pour vous-même.)

3. Soit $\mathcal{F} = \big(X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_n \subseteq X_{n+1} \subseteq \cdots\big)$ une *filtration* d'un espace topologique X, i.e., une suite d'inclusions de sous-espaces dont la réunion est égale à X.

(a) Utiliser les longues suites exactes associées aux couples (X_n, X_{n-1}) pour construire un complexe de chaînes $C(\mathcal{F})$ avec

$$C(\mathcal{F})_n = H_n(X_n, X_{n-1}).$$

(b) Soit $i_n : X_n \hookrightarrow X$ l'inclusion. Montrer que si pour tout $n \geq 1$,

- $H_{n-1}i_n : H_{n-1}X_n \xrightarrow{\cong} H_{n-1}X$,
- $H_n X_{n-1} = 0$, et
- $H_{n-1}(X_n, X_{n-1}) = 0$,

alors

$$H_n C(\mathcal{F}) \cong H_n X$$

pour tout n.

(c) Esquisser brièvement la construction d'une telle filtration du polytope associé à un complexe simplicial (admettant que l'homologie simpliciale d'un complexe simplicial est isomorphe à l'homologie singulière de son polytope associé) et du complexe de chaînes y associé.