TOPOLOGIE - SÉRIE 14

Exercice 1. Soit $(X, \mathcal{T}_d)$ un espace métrique connexe. Montrer que soit X est un singleton, soit X est indénombrable. *Indication: Utiliser la fonction distance à un point fixé.*

Preuve. Soit X un espace métrique connexe. Supposons que X est dénombrable et X n'est pas un singleton.

Soit x_0 fixé dans X. La fonction $f : X \to \mathbb{R}, x \mapsto d(x, x_0)$, est une fonction continue. En fait,

$$f^{-1}((a,b)) = B_X(x,b) \setminus \overline{B}_X(x,a),$$

qui est ouvert. Maintenant, comme l'image d'un connexe par une fonction continue est connexe (série 10), on a que $f(X)$ est un connexe, dénombrable (car X est dénombrable), donc un singleton. En effet, les connexes dans $\mathbb{R}$ sont des intervalles. Donc f est constant, et même égal à 0 car $d(x_0, x_0) = 0$, par définition d'une métrique. Mais ce n'est pas possible, car nous avons plus que deux points donc il existe $y \in X$ tel que $y \neq x_0$ et $d(x_0, y) > 0$. Ainsi, X est soit indénombrable, soit un singleton. □

Exercice 2. Est-ce que le cercle d'equation $(x-1)^2 + y^2 = 1$ est homéomorphe à l'*espace 8*, qui est la réunion des cercles d'equations $(x-1)^2 + y^2 = 1$ et $(x+1)^2 + y^2 = 1$?

Solution. NON. En supposont qu'il existe un homéomorphisme

$$f : 8 \to S^1,$$

on peut considérer sa restriction

$$f' : 8 \setminus \{(0,0)\} \to S^1 \setminus \{f(0,0)\},$$

qui doit toujours être un homéomorphisme. Mais ca n'est pas possible, parce que le cercle où l'on enlève un point est homéomorphe à un interval ouvert, et donc connexe, lorse que l'espace 8 privé de l'origine peut être décomposé en la réunion de deux ouverts disjoints non vides

$$8 \setminus \{(0,0)\} = (8 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}) \cup (8 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}),$$

et dont il n'est pas connexe. □

Exercice 3. Considérer les topologies produit, uniforme et boîte sur $\mathbb{R}^\omega$. Dans quelles topologies les suites suivantes convergent-elles?

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{w}_1 = (1,1,1,1,...), & \mathbf{x}_1 = (1,1,1,1,...), \\
\mathbf{w}_2 = (0,2,2,2,...), & \mathbf{x}_2 = (0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},...), \\
\mathbf{w}_3 = (0,0,3,3,...), & \mathbf{x}_3 = (0,0,\frac{1}{3},\frac{1}{3},...), \\
... & ... \\
 & \\
\mathbf{y}_1 = (1,0,0,0,...), & \mathbf{z}_1 = (1,1,0,0,...), \\
\mathbf{y}_2 = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,...), & \mathbf{z}_2 = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,...), \\
\mathbf{y}_3 = (\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},0,...), & \mathbf{z}_3 = (\frac{1}{3},\frac{1}{3},0,0,...), \\
... & ...
\end{array}$$

Date: 25 décembre 2014

Solution. Rappelons tout d'abord que $\mathcal{T}_{\text{prod}} \subseteq \mathcal{T}_{\bar{\rho}} \subseteq \mathcal{T}_{\text{box}}$. On a vu que la topologie produit est d'Hausdorff, et alors les trois le sont. En particulier, quand la limite existe, elle est unique (point important à comprendre!).

(w)
- *Produit* : OUI; On sais qu'une suite converge par rapport à la topologie produit si et seulement si chaque composante converge (voir Quiz 9). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la composante n-ième de la suite $(w_n)_n$ est zéro à partir de l'indice $n+1$, et donc converge vers 0. Mais alors $(w_n)_n$ converge vers $(0,0,0,\dots)$.
- *Uniforme*: NON; Le seul candidat est 0, par inclusion de topologie. Or, $0 \in B_{\bar{\rho}}(0, \frac{1}{2})$, qui est ouvert. Mais $w_n \notin B_{\bar{\rho}}(0, \frac{1}{2})$. En effet,

$$\bar{\rho}(w_m, 0) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \min(d(w_{mn}, 0), 1) = 1 > \frac{1}{2}.$$

- *Boîte*: NON; Par inclusion, elle ne converge pas dans la topologie boîte.

(x)&(y)
- *Uniforme* : OUI. On remarque que pout tout $m \in \mathbb{N}$ on a que $|x_m|, |y_n| < \frac{1}{m}$, c'est-à-dire $x_m, y_m \in B_{\overline{\rho}}(0, \frac{1}{m})$. Maintenant, pour chaque boule de la forme $B_{\overline{\rho}}(0, \varepsilon)$, on peut trouver $n > \frac{1}{\varepsilon}$, et donc pour $m > n$ on a que

$$x_m, y_m \in B_{\overline{\rho}}(0, \frac{1}{m}) \subseteq B_{\overline{\rho}}(0, \frac{1}{n}) \subseteq B_{\overline{\rho}}(0, \varepsilon).$$

  Par conséquent, pour tout voisinage de 0, les suites (x_n) et (y_n) sont la dedans à partir d'un certain indice, et donc elles convergent bien uniformement vers 0.
- *Produit* : OUI; Les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ convergent vers $(0, 0, \dots, 0)$, parce que la topologie produit est plus fine que la topologie uniforme.
- *Boîte* : NON; Encore, le seul candidat est $(0, 0, \dots, 0)$ et montrons que les suites ne convergent pas par rapport à la topologie boîte vers ce point. Soit $U = \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$, où $U_n := (-1/n, 1/n)$. On vérifie facilement que $(0, 0, \dots, 0) \in U$ et que U est bien un élément ouvert de la topologie boîte. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a que $x_{nn} = y_{nn} = 1/n \notin U_n$, donc $x_n, y_n \notin U$ pour aucun $n \in \mathbb{N}$.

(z) On va montrer que $(z_n)_n$ converge vers $(0, 0, \dots, 0)$ par rapport à la topologie boîte, et donc par rapport aux topologie uniforme et produit aussi. Soit $U = \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$ un ouvert de base qui contient 0. Comme la suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n > m$, on a que $\frac{1}{n} \in U_1 \cap U_2$, qui est un voisinage de 0. Mais alors pour tout $n > m$ et on a que $(z_n)_1 = (z_n)_2 = \frac{1}{m} \in U_1 \cap U_2$, et donc, pour $n > m$ on a que $z_n \in U$. Ce veut dire que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. □