

9.1. Etudions la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^n}{n^2+n+1} \right)$.

1.) Montrons que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ converge.

On a

$$x_n = \frac{1}{(2n+1)!} \quad \text{et} \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}$$

et donc

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Le critère de d'Alembert nous permet de conclure que la série converge.

2.) Montrons que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n+1}$ converge.

Si on pose

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n^2+n+1},$$

on vérifie aisément que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad x_n \cdot x_{n+1} < 0 \quad \text{et} \quad |x_{n+1}| < |x_n|.$$

Le critère des séries alternées nous permet de conclure que la série converge.

Puisque, par les points 1.) et 2.), les deux séries convergent séparément, leur somme converge également.

9.2. (a) Par le critère de d'Alembert, la série converge (absolument), car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)^4}{3n^4} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^4}{3n^4} = \frac{1}{3} < 1.$$

(b) Cette série converge par le critère des séries alternées. En effet, $x_n = \frac{(-1)^n}{3n-2}$ pour $n \geq 1$ satisfait les trois conditions de ce critère

- le signe de x_n change avec la parité de n ,
- la suite des valeurs absolues $|x_n| = \frac{1}{3n-2}$ est décroissante,
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

Notons encore que la série absolue $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ ne converge pas parce que $\frac{1}{3n-2} \geq \frac{1}{3n}$ et la

série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

(c) On a

$$\sqrt{n^2 + 7} - n = \frac{(\sqrt{n^2 + 7} - n)(\sqrt{n^2 + 7} + n)}{\sqrt{n^2 + 7} + n} = \frac{7}{\sqrt{n^2 + 7} + n}.$$

Observons que pour $n > 3$, on a $n^2 + 7 < (n + 1)^2$ et donc

$$\frac{7}{\sqrt{n^2 + 7} + n} > \frac{7}{\sqrt{(n + 1)^2 + n}} > \frac{7}{3n}.$$

Comme la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7}{3n} = \frac{7}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge, la série initiale diverge aussi par le critère de comparaison.

(d) On a

$$\left| 1 - \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \right| \stackrel{(1)}{=} 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) \stackrel{(2)}{\leq} 2 \left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)^2 = \frac{\pi^2}{2(n+1)^2},$$

où on a utilisé $1 - \cos(2\alpha) = 2 \sin^2 \alpha$ en ⁽¹⁾ et l'inégalité $\sin x \leq x$ pour $x \geq 0$ en ⁽²⁾.

Comme la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ converge, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)$ converge (absolument) par le critère de comparaison.

9.3. En notant s_n , s'_n et s''_n pour les sommes partielles, on a $s_n = s'_n + s''_n$ pour tout n . Puisque la suite (s_n) converge, il suit que (s'_n) converge si et seulement si (s''_n) converge (par la proposition sur la somme/différence de limites). En conclusion, si l'une des séries $\sum_{n=0}^{\infty} x'_n$ ou $\sum_{n=0}^{\infty} x''_n$ convergeait, alors les deux convergeraient. Mais on a $|x_n| = x'_n - x''_n$, et donc cette hypothèse entraînerait la convergence absolue de $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, ce qui n'est pas.