

20.1. Si $f \in C^2(\mathbf{R})$ et si $x \in \mathbf{R}$, on peut considérer les développements limités:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x+\theta h)}{2!}h^2, \quad \forall h \in \mathbf{R},$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x+\tilde{\theta}h)}{2!}h^2, \quad \forall h \in \mathbf{R},$$

où θ et $\tilde{\theta}$ sont des fonctions de h telles que $|\theta| < 1$ et $|\tilde{\theta}| < 1$.

Ainsi on obtient, si $h \neq 0$:

$$\left| \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} - f''(x) \right| \leq \frac{1}{2} |f''(x+\theta h) - f''(x)| + \frac{1}{2} |f''(x+\tilde{\theta}h) - f''(x)|.$$

Puisque f'' est continue, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\begin{aligned} |f''(x+\theta h) - f''(x)| &\leq \epsilon, & \text{si } |h| \leq \delta, \\ |f''(x+\tilde{\theta}h) - f''(x)| &\leq \epsilon, & \text{si } |h| \leq \delta. \end{aligned}$$

On obtient ainsi, si $0 < |h| \leq \delta$:

$$\left| \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} - f''(x) \right| \leq \epsilon,$$

ce qui prouve que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x).$$

20.2. Soit $x \in \mathbf{R}$ et soit $h \neq 0$. Puisque f est convexe, on a, si $\lambda \in [0, 1]$:

$$f(\lambda(x-h) + (1-\lambda)(x+h)) \leq \lambda f(x-h) + (1-\lambda)f(x+h).$$

En prenant $\lambda = \frac{1}{2}$, on obtient

$$f(x) \leq \frac{1}{2}f(x-h) + \frac{1}{2}f(x+h),$$

et par suite

$$\frac{f(x-h) + f(x+h) - 2f(x)}{h^2} \geq 0.$$

L'exercice 20.1 nous permet de conclure que $f''(x) \geq 0$.

20.3. (a) Pour $n \in \mathbf{N}$, nous utilisons la règle de Bernoulli-L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{n-1}}{\exp(x)} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\exp(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0$$

(b) Pour $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots + a_0$, nous observons que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{\exp(x)} = \sum_{0 \leq i \leq n} \lim_{x \rightarrow \infty} a_i \frac{x^i}{\exp(x)} = 0$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow \infty} Q(x) \rightarrow \pm\infty$, nous observons

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x) \exp(x)} = 0$$

(c) Nous observons que

$$\frac{d}{dx} \exp(-x) \exp(x) = 0$$

donc

$$\exp(-x) = \frac{c}{\exp(x)}$$

pour $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Pour cette raison, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

Donc f est continue en 0.

Nous utilisons le théorème de Darboux:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{2}{x^3} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{2c}{x^3 \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)} = 0 \end{aligned}$$

(De même pour $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f'(x)$.)

(d) Nous appliquons plusieurs fois le théorème de Darboux et nous calculons:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f^{(2)}(x) &= \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \left(-\frac{(6x^2 - 4)c}{x^6 \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)}\right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f^{(3)}(x) &= \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \left(-\frac{(24x^4 - 36x^2 + 8)c}{x^9 \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)}\right) = 0 \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

etc.