19.1. On pose $p(x) = f(a)+f'(a)(x-a)$ et $h(x) = f(x)-p(x)-\frac{f(b)-p(b)}{(b-a)^2}(x-a)^2$. On a $h(a) = h(b) = 0$. Par le théorème de Rolle, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $h'(\xi) = 0$.
Calculons
$$h'(x) = f'(x) - p'(x) - 2\frac{f(b) - p(b)}{(b-a)^2}(x-a),$$
on a donc $h'(a) = f'(a) - p'(a) = 0$.
En réutilisant le théorème de Rolle encore une fois sur h' on aura l'existence de $c \in]a, \xi[$ tel que $h''(c) = 0$.
Ainsi,
$$f''(c) - \underbrace{p''(c)}_{=0} - 2\frac{f(b) - p(b)}{(b-a)^2} = 0$$
$$\Rightarrow \quad f(b) = p(b) + \frac{1}{2}f''(c)(b-a)^2 = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2}f''(c)(b-a)^2.$$

19.2. Puisque $x < y < z$, on a $\frac{z-y}{z-x} \in]0, 1[$. Posons donc $\lambda = \frac{z-y}{z-x}$. On obtient $1-\lambda = \frac{y-x}{z-x}$ et on a bien
$$y = \lambda x + (1-\lambda)z.$$

Puisque f est convexe, on a $f(y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(z)$ et ainsi
$$f(y) \leq \frac{z-y}{z-x}f(x) + \frac{y-x}{z-x}f(z).$$
On obtient donc
$$\frac{f(y) - f(x)}{y-x} \leq \left(\frac{z-y}{(z-x)(y-x)} - \frac{1}{y-x}\right) f(x) + \frac{1}{z-x}f(z) = \frac{f(z) - f(x)}{z-x}. \tag{1}$$
De même, on aura
$$\frac{f(y) - f(z)}{z-y} \leq \frac{1}{z-x}f(x) + \left(\frac{y-x}{(z-x)(z-y)} - \frac{1}{z-y}\right) f(z) = \frac{f(x) - f(z)}{z-x} \tag{2}$$
En résumé, (1) et (2) impliquent
$$\frac{f(y) - f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z-y}.$$

19.3. Si $x = y$, la relation donnée par l'indication est évidente. Si $x < y$, on a trois situations possibles:
$$x_0 < x < y \qquad \text{ou} \qquad x < x_0 < y \qquad \text{ou} \qquad x < y < x_0.$$
Dans les trois cas on vérifie en utilisant l'exercice 1 que
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}.$$
Posons pour $x \neq x_0$,
$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

On a donc montré que g est définie sur $I - \{x_0\}$ et que g est croissante. De plus, g est bornée au voisinage de x_0; en effet, il existe $\delta > 0$ tel que $V = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\} \subset I$ et en posant $M = g(x_0 - \delta)$ et $\bar{M} = g(x_0 + \delta)$, puisque g est croissante sur I, on a

$$M \leq g(x) \leq \bar{M}, \quad \forall x \in V.$$

En utilisant l'exercice 10.1, on a

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} g(x) \quad \text{existent.}$$

Ainsi, $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent. De plus on a, si $x \neq x_0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

et puisque $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent, alors on a

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) \quad = \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) \quad = \quad f(x_0)$$

ce qui montre que f est continue en x_0.