ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Cours de physique du sol

DYNAMIQUE DE L'EAU DU SOL

Copie des transparents

Version provisoire

Prof. A. Mermoud

Janvier 2006

Description mathématique des transferts d'eau dans le sol

Définitions préalables

Processus:

- ***uniformes*** **(invariants dans le temps et dans l'espace)**
- ***permanents*** **(constants dans le temps)**
- ***transitoires*****, dans le cas le plus général**

Ecoulements:

- ***laminaires***
- ***turbulents***

Critère de séparation: $\mathbf{Re} = \dfrac{\mathbf{v\ d}}{\nu} < \mathbf{1 \text{ à } 10}$ *

Variabilité des propriétés des sols:

- ***sol homogène***
- ***sol hétérogène***

- ***sol isotrope***
- ***sol anisotrope***

*** Nombre de Reynolds**

Laminar versus turbulent flow

Slowly moving fluids are dominated by viscous forces: water molecules follow smooth lines (streamlines) and the flow is laminar.

When the inertial forces due to movement are more influential than the viscous forces, the water movement of molecules Is erratic. The flow becomes turbulent.

The Reynolds number Re determines whether the flow will be laminar or turbulent:

$$\mathrm{Re} = \frac{v\,d}{\nu}$$

v : average water velocity
ν : water cinematic viscosity
d : diameter of the passageway through which the fluid moves

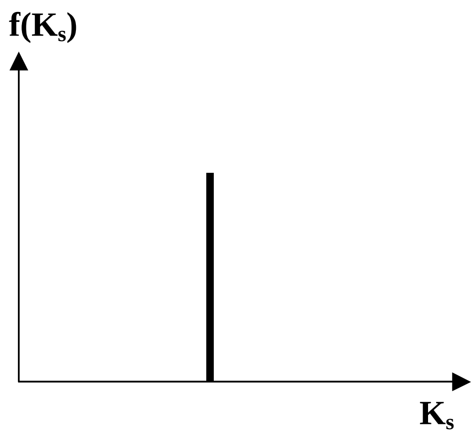
For open-channel, d is the hydraulic radius, for pipes, the diameter and the transition from laminar to turbulent flow occur for Re > 2000.

For a porous medium, it is difficult to determine d. Rather than an average or characteristic pore diameter, the average grain size is often used. The transition between the two regimes corresponds to Re less than 1 to 10.

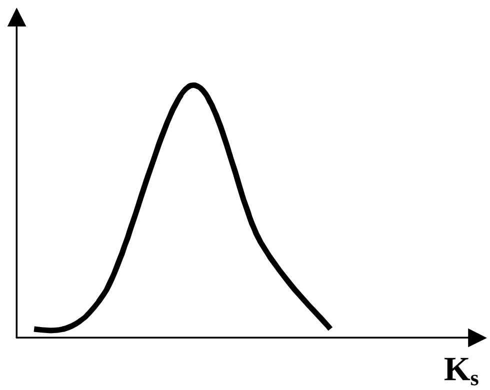
Variabilité spatiale des sols

Exemple de la conductivité hydraulique à saturation K_s

Milieu homogène (FDP* unimodale)

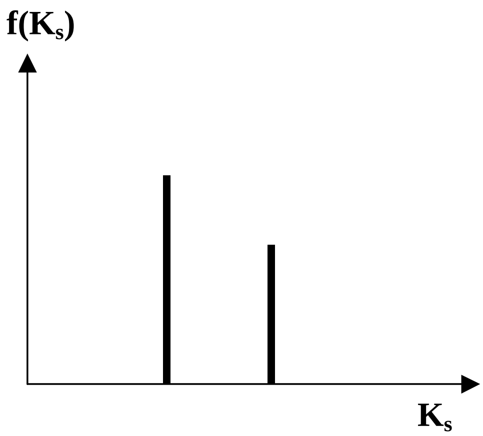


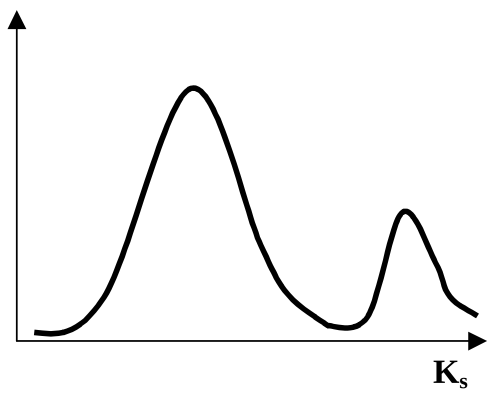
Uniforme



Non uniforme

Milieu hétérogène (FDP plurimodale)



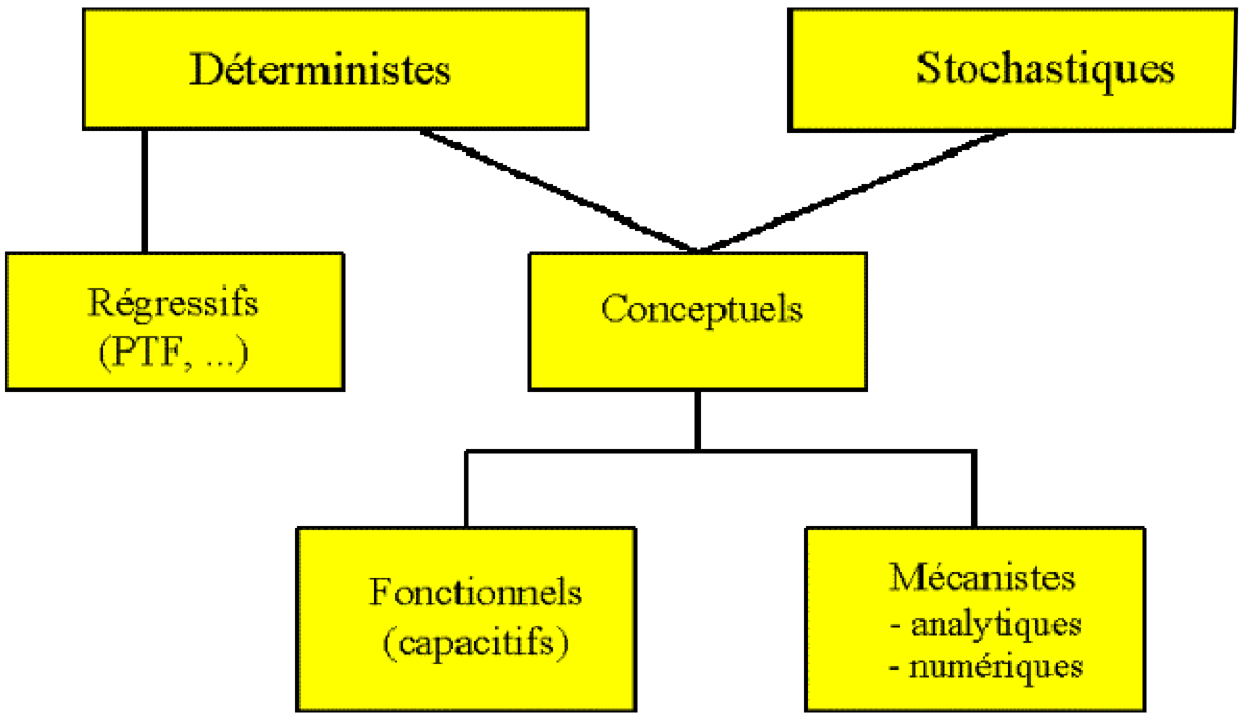


*** FDP: fonction de densité de probabilité**

Usefulness of models

- for predicting the behavior of water and solutes in the soil; especially useful for making predictions in the framework of scenario analysis
- for assisting farmers and growers in designing effective crop, soil and chemical management strategies
- for extrapolating information from a limited number of experiments to different soil, crop and climatic conditions
- for identifying persistent and mobile pesticides that may pose significant risks to the environment and human health (screening models)
- for analyzing and interpreting laboratory and field experiments
- for planning monitoring networks

Different approaches for modelling soil water processes



Approches de modélisation et hypothèses

Modèles déterministes: les paramètres du sol et les autres données d'entrée sont définis de façon unique, si bien que la réponse du modèle est unique

ou:

Modèles stochastiques: les paramètres du sol et éventuellement certaines autres données d'entrée sont introduits sous forme de variables aléatoires décrites par des FDP. Les résultats de ces modèles sont donc également exprimés sous forme de FDP

Modèles mécanistes (à base physique): les équations (généralement des éq. aux dérivées partielles) reposent sur des lois empruntées à la physique, la chimie et, le cas échéant, la biologie. Elles fournissent les variations spatio-temporelles des variables d'état*, en fonction des cond. initiales et aux limites, moyennant la connaissance de paramètres caractérisant les propriétés du sol**.

ou:

Modèles fonctionnels: les processus impliqués dans les transferts sont pris en compte de façon très simplifiée; la formulation math. de ces modèles est généralement simple; ils exigent peu de données et sont faciles à résoudre.

L'approche considérée par la suite est essentiellement de type **mécaniste déterministe**

* Teneur en eau, charge de pression, concentration, température, etc
** Conductivité hydraulique, capacité capillaire, conductivité thermique, coefficient de dispersion, etc.

Description mathématique des transferts (eau, gaz, solutés, chaleur)

Les transferts mettent généralement en jeu deux types de processus:

- **un *mouvement* décrit par une *équation dynamique***
- **une *variation temporelle du stock* qui résulte :**
  - ✓ **d'influences externes (précipitations, évaporation, etc.)**
  - ✓ **de consommations ou productions locales (extraction racinaire, processus biologiques, etc.)**
  - ✓ **d'échanges entre phases (gel, condensation, évaporation, etc.)**

Les variations de stock sont décrites par la loi de la conservation de la matière (*équation de continuité*).

Equations dynamiques

Forme générale :

$$\boxed{J = - K \text{ grad } \phi}$$

J : densité de flux ou flux

K : coefficient de transfert

Φ : potentiel énergétique

grad Φ : force motrice

Processus	Loi	Expr. math.	K	ϕ
Transfert d'eau	Darcy	$q = - K \text{ grad } H$	Cond. hydraulique K	Charge hydraulique H
Transfert de chaleur	Fourier	$q_F = - K_F \text{ grad } T$	Cond. thermique K_F	Température T
Transport de subs. chimiques ou de gaz	Fick	$q_s = - D_L \text{ grad } C$	Coefficient de diffusion D_L	Concentration C

Equation de conservation (continuité)

Exprime que la variation temporelle de la grandeur considérée (teneur en eau, densité de chaleur, concentration, etc.) est égale à la variation spatiale du flux, corrigée d'éventuels apports, pertes ou transformations à l'intérieur du système:

Forme générale :

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{t}} = -\,\mathbf{div}\ \mathbf{J} + \sum \mathbf{r_i}}$$

E : concentration volumique de l'élément considéré

J : flux ou densité de flux à travers les limites du système

r_i : taux d'apports, prélèvements ou transformations à l'intérieur du système

Substance considérée	E	Unités	J	Unités
Eau	θ	$m^3 \cdot m^{-3}$	q	$m \cdot s^{-1}$
Chaleur	$C_F T$	$J \cdot m^{-3}$	q_F	$J \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$
Subs. chimiques ou gaz	C	$kg \cdot m^{-3}$	q_s	$kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$

Water movement in soil

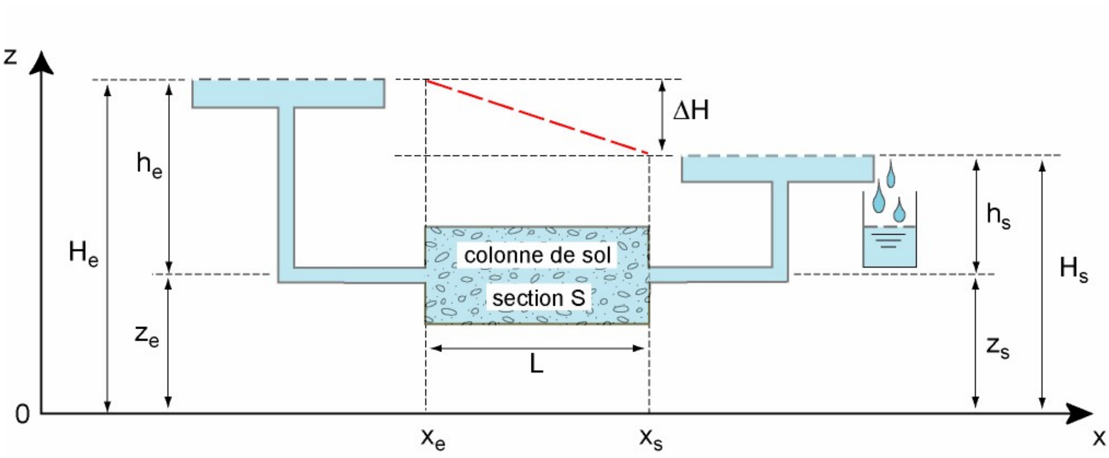
- **System at equilibrium** : the hydraulic head is constant everywhere and no water flow occurs.

- **Non equilibrium system** : the hydraulic head varies from point to point in the system. In this situation water will flow from regions of higher potential to regions of lower potential at a rate that depends on the potential difference and on the hydraulic resistance of the medium.

  When the flow or hydraulic head depends on time, the system is called **transient**.

  When all the variables don't vary in time, the system is called **steady-state**; such a system is characterized by water flows that don't cause storage changes within the soil.

Etablissement de la loi de Darcy en sol saturé



Q : débit permanent à travers la colonne (m^3/s)
S : section de la colonne (m^2)
L : longueur de la colonne (m)
ΔH : différence de niveau entre les réservoirs (m) = perte de charge

$$Q \approx S \frac{\Delta H}{L}$$

$$Q = -K_s \, S \frac{\Delta H}{L}$$

K_s : conductivité hydraulique du sol à saturation (m/s)

ΔH/L : perte de charge par unité de longueur ou gradient hydraulique

$$\boxed{q = -K_s \frac{\Delta H}{L}}$$

q = Q/S : débit par unité de surface, densité de flux ou flux (m/s)

Généralisation de la loi de Darcy en sol saturé

Lorsque la charge hydraulique ne varie pas linéairement le long de la direction d'écoulement (écoulement non permanent par ex.), il faut considérer les valeurs locales du gradient.

La loi de Darcy prend une forme différentielle et s'écrit, toujours à une dimension et dans une direction s quelconque:

$$q = -K_s \frac{\partial H}{\partial s}$$

Pour un écoulement horizontal:

$$q = -K_s \frac{\partial H}{\partial x}$$

Pour un écoulement vertical:

$$q = -K_s \frac{\partial H}{\partial z}$$

Dans un système à 3 dimensions, l'équation de Darcy devient:

$$\boxed{\vec{q} = -K_s \, \vec{g}\mathrm{rad}\, H}$$

Valeurs indicatives de la conductivité hydraulique à saturation K_s

Nature du sol	*K_s en $m \cdot s^{-1}$*			*K_s en $m \cdot j^{-1}$*		
Sols argileux de surface	10^{-7}	à	10^{-6}	0.01	à	0.1
Sols limoneux de surface	10^{-6}	à	10^{-5}	0.1	à	1
Sable fin	10^{-5}	à	$5 \cdot 10^{-5}$	1	à	5
Sable moyen	$5 \cdot 10^{-5}$	à	$2.5 \cdot 10^{-4}$	5	à	20
Sable grossier	$2.5 \cdot 10^{-4}$	à	10^{-3}	20	à	100
Gravier		$> 10^{-3}$			> 100	

Détermination de la conductivité hydraulique à saturation

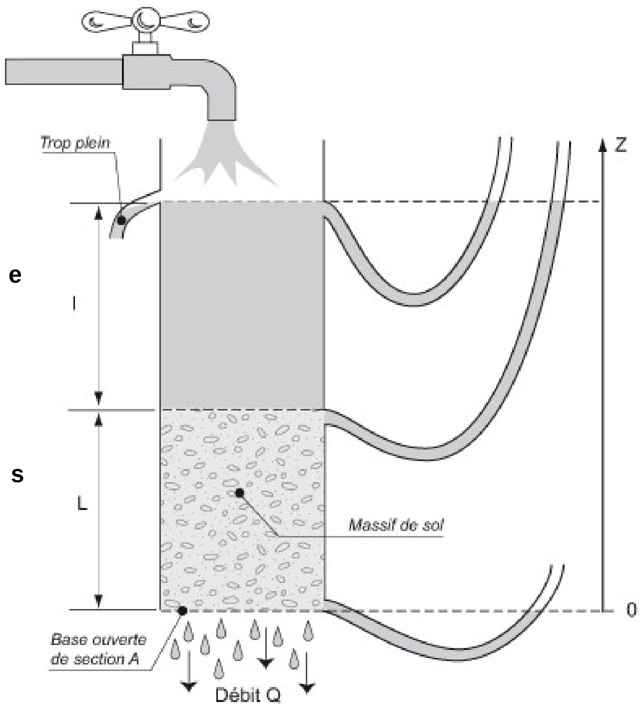
Laboratoire

- **perméamètre à charge constante**
- **perméamètre à charge variable**

In-situ

- ***en présence d'une nappe peu profonde***
  - **méthode du trou de tarière**
  - **essai de pompage**
- ***en l'absence de nappe superficielle***
  - **infiltration à charge variable (Porchet)**
  - **infiltration à charge constante (perméamètre de Guelph)**

Principe du perméamètre à charge constante



Une fois le régime permanent atteint, la loi de Darcy s'écrit:

$$Q = -K_s\, S\, \frac{\Delta H}{L} \qquad \text{soit:} \qquad K_s = -\frac{Q}{S}\,\frac{L}{\Delta H}$$

$$\Delta H = H_e - H_s = h_e + z_e - (h_s + z_s) = l + L - (0+0) = l + L$$

$$\boxed{K_s = -\frac{Q}{S}\,\frac{L}{(l+L)}}$$

Le débit Q est négatif car orienté dans la direction opposée à l'axe z

*** indice e : entrée dans le massif de sol**
Indice s : sortie du massif de sol

Mesure de la conductivité hydraulique à saturation en présence d'une nappe peu profonde

- **Méthode du trou de tarière (remontée de nappe)**

  Pompage rapide et observation de la vitesse de remontée de l'eau dans un trou de tarière foré dans la nappe

  Interprétation par l'une des formules:

  - **Diserens**
  - **Ernst**
  - **Boast et Kirkham**
  - **etc…**

- **Méthode par essai de pompage (surtout utilisée pour les prospections hydrogéologiques)**

  - **Pompage en régime permanent dans un puits complet ou non (interprétation par les formules de Dupuit, Thiem, Guyon, etc.)**

  - **Pompage en régime non permanent (interprétation par les formules de Theis, Jacob, etc.)**

Mesure de la conductivité hydraulique à saturation en l'absence de nappe superficielle

- **Méthode par infiltration à charge variable**

  Observation de la vitesse d'abaissement de l'eau dans un trou de tarière préalablement rempli d'eau.

  Interprétation par la formule de Porchet.

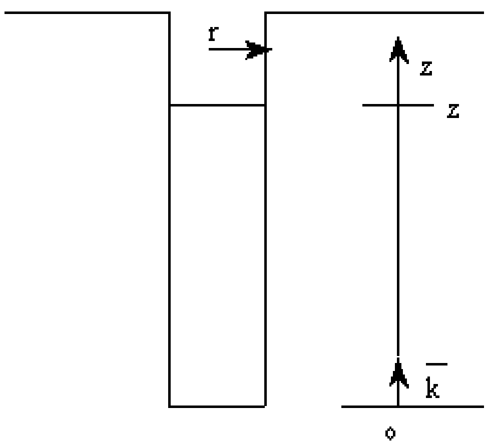
- **Méthode par infiltration à charge constante**

  Mesure du débit stabilisé (en régime permanent) qu'il faut injecter dans un forage pour maintenir une charge d'eau constante.

  Le perméamètre de Guelph est fréquemment utilisé.

Mesure de K_s en l'absence de nappe

Infiltration à charge variable (formule de Porchet)



Au temps t:

- $$Q = \frac{dV}{dt} = \pi\, r^2 \frac{dz}{dt}$$
- **Infiltration à travers le fond et les parois:**

$$Q = -K_s \left(\pi\, r^2 + 2\,\pi\, r\, z\right)\frac{dH}{dz}$$

Si l'on fait l'hypothèse d'un gradient unitaire (dH/dz=1) et que l'on égale les deux expressions:

$$\pi\, r^2 \frac{dz}{dt} = -2\,K_s\,\pi\, r\left(\frac{r}{2} + z\right) \qquad \text{ou:} \qquad -\frac{r}{2\,K_s}\left(\frac{dz}{r/2 + z}\right) = dt$$

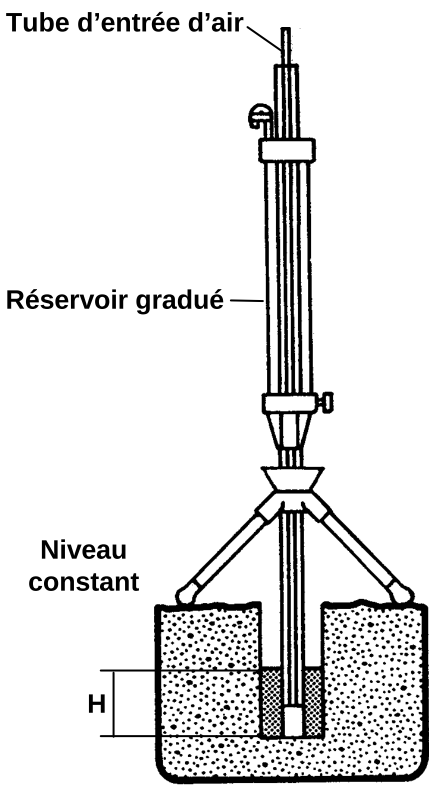
En intégrant: $$-\frac{r}{2\,K_s}\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{r/2 + z} = \int_{t_1}^{t_2} dt$$

$$-\frac{r}{2\,K_s}\left|\ln\left(r/2 + z\right)\right|_{z_1}^{z_2} = t_2 - t_1$$

➔ $$\boxed{K_s = \frac{r}{2\left(t_2 - t_1\right)}\ln\left(\frac{r/2 + z_1}{r/2 + z_2}\right)}$$

L'hypothèse du gradient unitaire est discutable. L'équation ne peut être utilisée qu'en sols très humides.

Perméamètre de Guelph (Well permeameter)



Avantages

- rapidité (env. ½ h pour un essai)
- nécessite peu d'eau (quelques litres)
- équipement simple, léger et facile à déplacer

Principe de la mesure

- trou de tarière de faible rayon r
- maintien d'une charge H cste
- mesure du débit Q lorsque le régime permanent est atteint

Appareil

- essentiellement un vase de Mariotte pour maintenir la charge H constante
- réservoir gradué pour déterminer précisément le débit Q

Analyse théorique :

le débit Q en régime permanent dans un trou cylindrique vaut (Reynolds et Elrick) :

$$\boxed{Q = A\,K_s + B\,\Phi_m}$$

$$\Phi_m = \int_{h_i}^{0} K(h)\,dh$$

Φ_m : potentiel d'écoulement

h_i : charge de pression initiale dans le sol

$A = 2\pi\, H^2/C + \pi\, r^2$

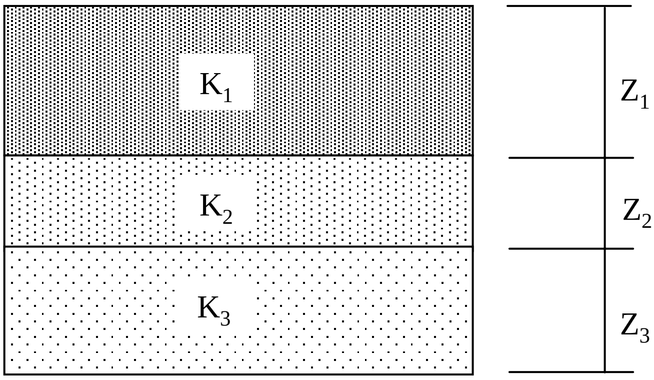
$B = 2\pi\, H/C$

C = facteur de forme, fonction de H et r, faiblement du type de sol (tabulé)

Pratiquement on effectue 2 essais à 2 charges H_1 et H_2 différentes.

Conductivité hydraulique équivalente en sols stratifiés

a) Ecoulement horizontal



$$K_x = \frac{K_1\, z_1 + K_2\, z_2 + \dots + K_n\, z_n}{z_1 + z_2 + \dots + z_n} = \frac{\sum K_i\, z_i}{\sum z_i}$$

K_x : conductivité hydraulique équivalente horizontale

b) Ecoulement vertical

$$K_z = \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n}{\frac{z_1}{K_1} + \frac{z_2}{K_2} + \dots + \frac{z_n}{K_n}} = \frac{\sum z_i}{\sum \frac{z_i}{K_i}}$$

K_z : conductivité hydraulique équivalente verticale

Forme intégrale de l'équation de Darcy

En régime permanent (flux constant dans le temps):

$$q = -K(h)\left(\frac{dh}{dz} + 1\right)$$

Le flux q entre 2 points z_1 et z_2 peut être calculé en intégrant cette relation.

Après séparation des variables : $$-\ dz = \frac{dh}{\left(1 + \frac{q}{K(h)}\right)}$$

et, après intégration : $$-\int_{z_1}^{z_2} dz = \int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{\left(1 + \frac{q}{K(h)}\right)} = z_1 - z_2$$

$$\boxed{z_1 - z_2 = \int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{\left(1 + \frac{q}{K(h)}\right)}}$$

Forme intégrale de l'éq. de Darcy

Pour certaines formulations mathématiques de la relation K(h), l'intégration du second membre peut se faire directement et conduire à une expression analytique de h(z) ou du flux.

Applications :

- **Evaporation permanente depuis une nappe peu profonde**
- **Infiltration en régime permanent**

Transferts d'eau en milieux non saturés

En milieu **non saturé**, la teneur en eau θ est inférieure à θ_s et fait, dans le cas du régime transitoire, l'objet de variations temporelles.

- ➔ variations temporelles du stock d'eau du sol
- ➔ nécessité d'associer l'**éq. de conservation** de la masse d'eau à l'**éq. dynamique**

Généralisation de la loi de Darcy aux milieux non saturés

En milieu non saturé, la conductivité hydraulique varie avec la teneur en eau θ et la charge de pression h ➧ K = K(θ) ou K = K(h)

La loi de Darcy étendue aux milieux non saturés s'écrit donc:

$$\boxed{q = -K(\theta)\,\text{grad}H}$$

ou encore, puisque H = h(θ) – z* :

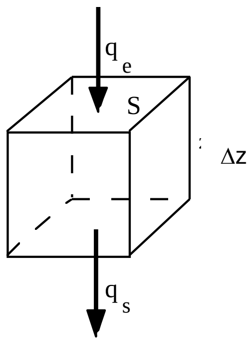
$$\boxed{q = -K(\theta)\,\text{grad}\big(h(\theta) - z\big)}$$

En écoulement unidimensionnel vertical:

$$q = -K(\theta)\frac{\partial H}{\partial z} = -K(\theta)\left(\frac{\partial h}{\partial z} - 1\right)$$

* Axe des z orienté positivement vers le bas

Equation de conservation de la masse (équation de continuité)*



$M_s - M_e = \Delta M_w$

M_s : masse d'eau quittant le sol
M_e : masse d'eau entrant dans le sol
M_w : masse d'eau dans le sol

ou encore :

$V_s - V_e = \Delta V_w$

V_w : volume d'eau dans le sol

$$\left.\begin{aligned} V_s &= q_s\, S\, \Delta t \\ V_e &= q_e\, S\, \Delta t \end{aligned}\right\} \qquad \Delta V_w = \Delta q\, S\, \Delta t \qquad \text{(t : temps)}$$

Or : $\Delta V_w = - V\, \Delta\theta = - S\, \Delta z\, \Delta\theta$ **(θ : teneur en eau)**

➔ $\Delta q\, S\, \Delta t = - S\, \Delta z\, \Delta q$

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = -\frac{\Delta q}{\Delta z}$$

soit, à 3 dimensions et en passant à la limite :

$$\boxed{\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\,\mathrm{div}\; q}$$

En présence d'extraction racinaire:

$$\boxed{\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\,\mathrm{div}\; q + r_w}$$

* **Extraction racinaire r_w (volume d'eau prélevée par les racines par unité de volume de sol et par unité de temps) non prise en compte**

Mathematical description of soil water flow

- **Darcy's law**

$$q = -K(\theta)\,\mathrm{grad}H$$

$$q = -K(\theta)\,\mathrm{grad}\left(h(\theta) - z\right)$$

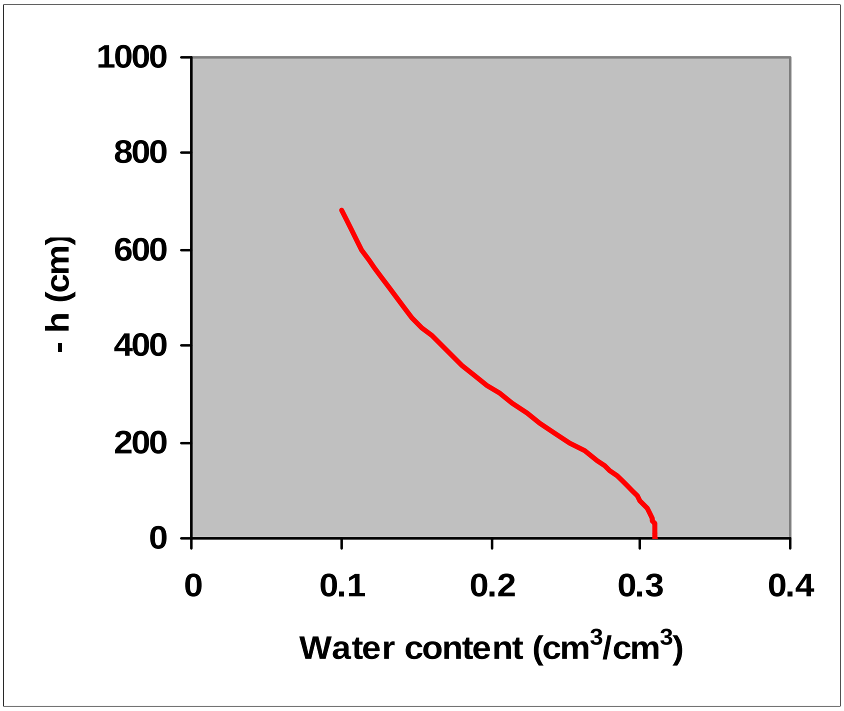
- **Continuity eq.**

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\,\mathrm{div}\,q + r_w$$

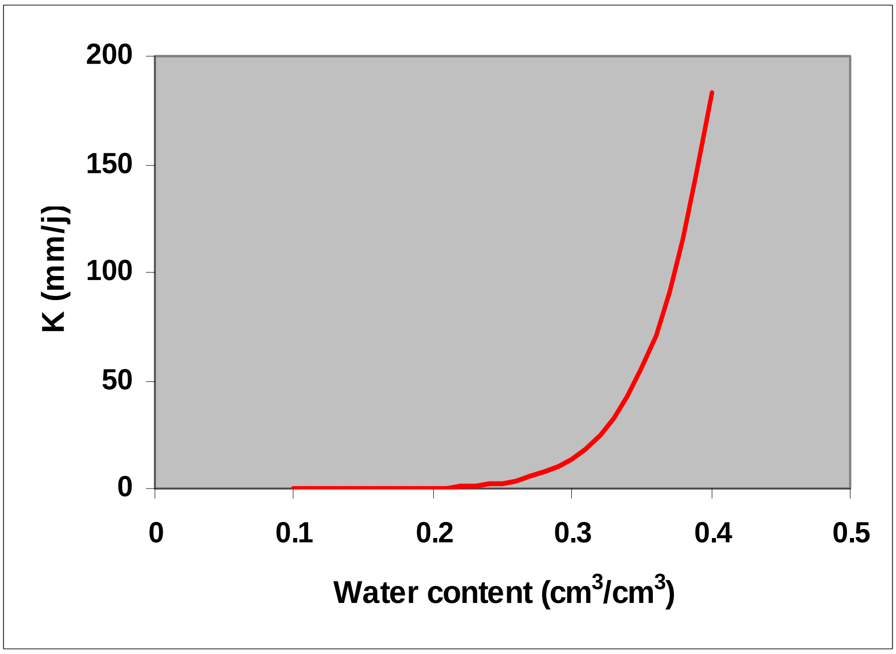
Soil water flow equation

$$\boxed{\frac{\partial \theta}{\partial t} = \mathrm{div}\left[K(\theta)\,\mathrm{grad}\left(h(\theta) - z\right)\right] + r_w}$$

- **need to know K(θ) and h(θ) (soil hydraulic functions)**
- **2 dependent variables (two unknowns) : θ and h**
- **in cropped soils, mathematical formulation of the uptake term r_w is required**



Soil water retention function h(θ)



Hydraulic conductivity function K(θ)

Equations générales de description des transferts d'eau

1.- En terme de charge de pression h :

En introduisant la capacité capillaire c(h) définie par:

$$c(h) = \frac{d\theta}{dh}$$

$$\boxed{c(h)\frac{\partial h}{\partial t} = \text{div}\left[K(h)\ \text{grad}\,(h - z)\right] + r_w}$$

(équation de Richards: forme capacitive)

2.- En terme de teneur en eau θ :

En introduisant la capacité capillaire D(θ) définie par:

$$D(\theta) = \frac{K(\theta)}{c(\theta)} = K(\theta)\frac{dh}{d\theta}$$

$$\boxed{\frac{\partial \theta}{\partial t} = \text{div}\left(D(\theta)\ \text{grad}\,\theta\right) - \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} + r_w}$$

(forme diffusive de l'équation de Richards

ou éq. de Fokker-Plank)

Resolution of the soil water flow equations

Fokker-Plank equation:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \mathbf{div}\left(\mathbf{D}\,(\theta)\ \ \mathbf{grad}\,\theta\right) - \frac{\partial \mathbf{K}(\theta)}{\partial z} + r_w$$

Richards equation:

$$c(h)\frac{\partial h}{\partial t} = \mathbf{div}\ \left[K(h)\ \ \mathbf{grad}\ (h - z)\right] + r_w$$

- **Higly non linear partial differential equations**
- **Solution requires specification of the state of the system at the beginning of the simulation (initial condition (IC)) and of the conditions prevailing at the limits of the system during the simulation (boundary conditions (BC))**
- **Resolution is generally based on numerical methods* (analytical solutions only exist for very restrictive BC)**

Results: **Spatio-temporal variations of the water content $\theta(x,y,z,t)$ or soil water pressure head $h(x,y,z,t)$**

* Mostly finite differences or finite elements

Richards equation

Inserting the water capacity function c(h) defined as :

$$\mathbf{c(h) = \frac{d\theta}{dh}}$$

into the soil water flow equation* produces :

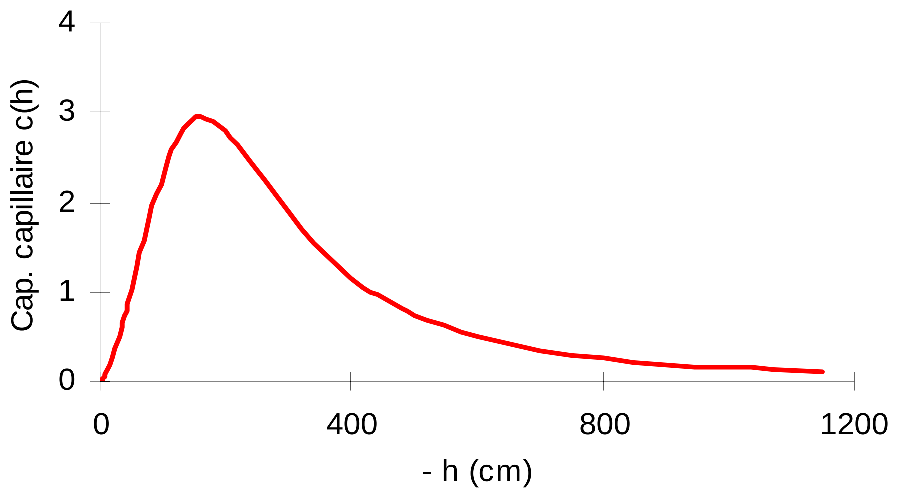
$$\boxed{\mathbf{c(h)\frac{\partial h}{\partial t} = div\ [K(h)\ \ grad\ (h - z)] + r_w}}$$

(Richards equation)

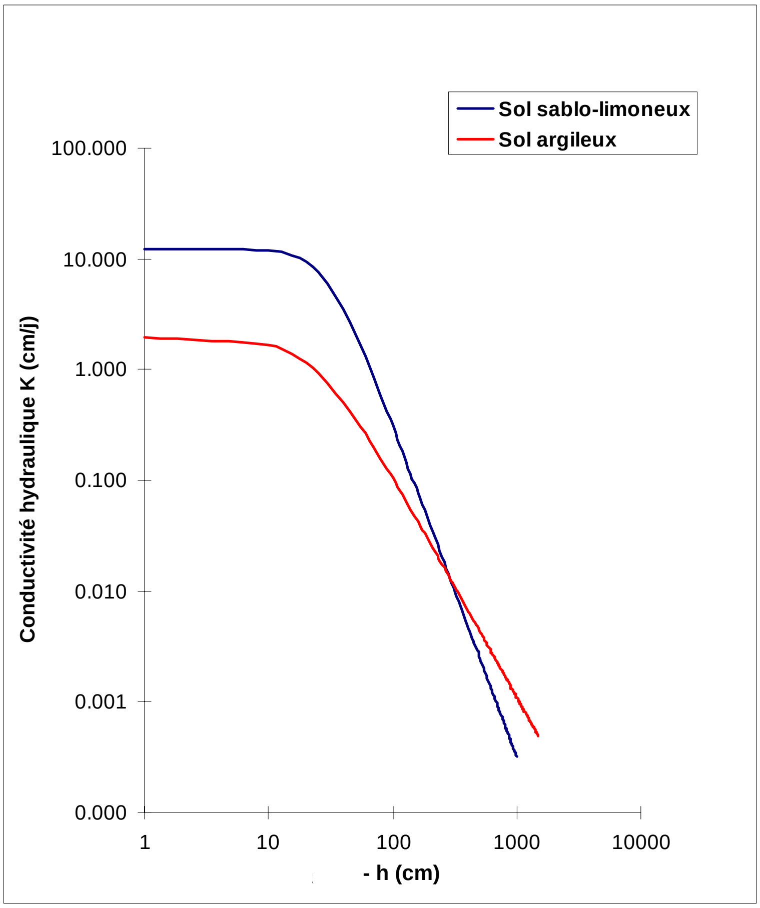
The equation may be solved if :

- **the soil hydraulic functions c(h) and K(h) are known**
- **the root water uptake function r_w is known**
- **IC and BC are specified adequately**

* $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{d\theta}{dh}\frac{\partial h}{\partial t} = c(h)\frac{\partial h}{\partial t}$ (chain rule)



Example of water capacity function c(h)



Example of hydraulic conductivity functions K(h)

Fonction de capacité capillaire $c(\psi)$

$c(\psi)$ = - $d\theta/d\psi$ = $d\theta/dh$

Par dérivation de la fonction de rétention de Van Genuchten:

$$\boxed{c(\psi) = \frac{(\theta_s - \theta_r)(-m)\alpha n(-1)(\psi)^{n-1}}{\left[1+(\alpha\psi)^n\right]^{1+m}}}$$

θ_s et θ_r : **teneur en eau à saturation et teneur en eau résiduelle**

α, **n et m : paramètres de la courbe de rétention**

Si m = 1 - 1/n (Mualem, 1976):

$$\boxed{c(\psi) = \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)(n-1)(\psi)^{n-1}}{\left[1+(\alpha\psi)^n\right]^{2-1/n}}}$$

Fonction de conductivité hydraulique K(θ) ou K(ψ)

Equation de Van Genuchten :

$$K(\theta) = K_s \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right) \left[1 - \left(1 - \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^{1/m} \right)^m \right]^2$$

ou :

$$K(\psi) = \frac{K_s \left\{ 1 - (\alpha \psi)^{n-1} \left[1 + (\alpha \psi)^n \right]^{-m} \right\}^2}{\left[1 + (\alpha \psi)^n \right]^{m/2}}$$

K_s	:	conductivité hydraulique à saturation
θ_s et θ_r	:	teneur en eau à saturation et teneur en eau résiduelle
m	:	constante du sol; m = 1-1/n (Mualem, 1976)
α et n	:	paramètres de la courbe de rétention

Root water uptake

$$r_w(h) = \alpha(h)\, S_p$$

r_w (h) : volume of water taken up by the roots per unit bulk volume of soil per unit time (T^{-1})

α (h) : water stress response function (-)

S_p : potential water uptake rate (T^{-1})

S_p is calculated from T_p and specifies at which depth water will be extracted; various expressions have been proposed for S_p :

- S_p distributed homogeneously with depth*

$$S_p = \frac{T_p}{z_r}$$

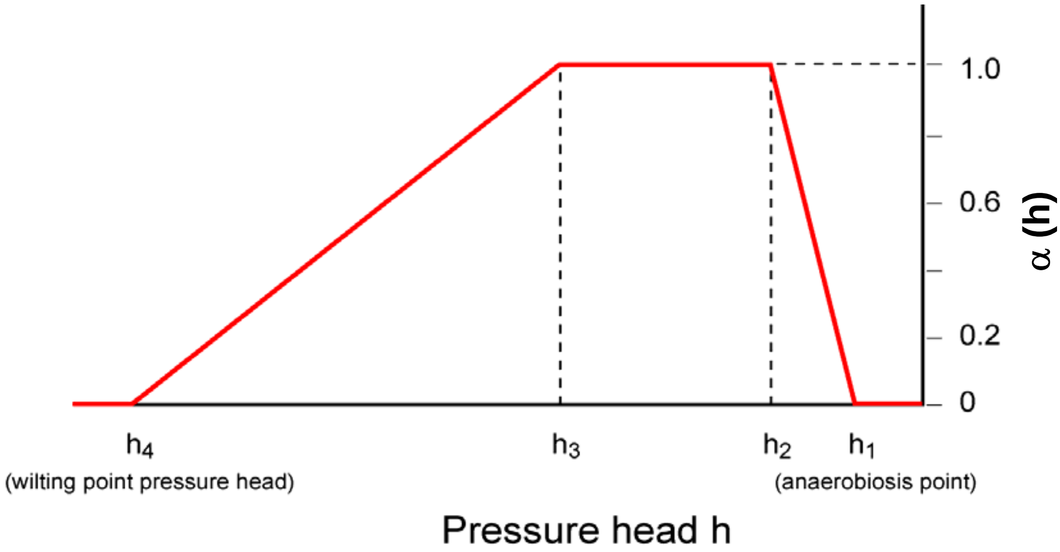
T_p : potential transpiration ($L\ T^{-1}$)
z_r : bottom of the root zone (L)

- $S_p = 0$ at $z = z_r$ **

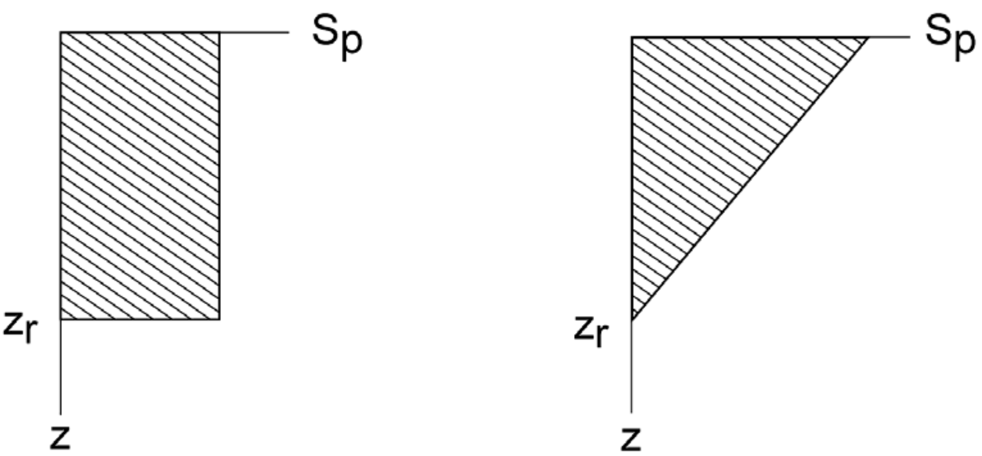
$$S_p = \frac{2\,T_p}{z_r}\left(1 - \frac{z}{z_r}\right)$$

* Feddes et al, 1978

** Prasad, 1986



Schematic view of the plant water stress response function $\alpha(h)$



$$S_p = \frac{T_p}{z_r}$$

(Feddes et al, 1978)

$$S_p = \frac{2T_p}{z_r}\left(1 - \frac{z}{z_r}\right)$$

(Prasad, 1986)

Schematic view of two different water uptake functions under optimal soil moisture conditions ($\alpha(h) = 1$)

Specification of the **initial condition** for the Richards equation

Specification of the initial ($t = 0$) distribution of the pressure head within the flow domain $h(z,0)$ is required, namely:

$$h(z,o) = h_i(z) \qquad 0 \leq z \leq L$$

$h_i(z)$	:	**prescribed initial soil water pressure head profile**
L	:	**lower limit of the study domain**

Examples of boundary conditions for water flow

- **Prescribed pressure head (Dirichlet type):**

$h(0,t) = h_o(t) \qquad t > 0 \qquad$ (upper BC)

$h(L,t) = h_L(t) \qquad t > 0 \qquad$ (lower BC)

h_o and h_L : prescribed functions of time

L : lower limit of the study domain

- **Prescribed flux (Neumann type):**

$$\left(-K\frac{\partial h}{\partial z}+K\right)\Bigg|_{z=o} = q_o(t) \qquad \text{(upper BC)}$$

$$\left(-K\frac{\partial h}{\partial z}+K\right)\Bigg|_{z=L} = q_L(t) \qquad \text{(lower BC)}$$

q_o and q_L : prescribed flux at the upper and bottom boundaries, respectively

Definition of the upper boundary condition

The flow situation at the soil surface is determined by the infiltration or the evaporative flux.

As long as the flow conditions are not limiting, the flux $q_o(t)$ through the soil surface equals:

$$q_o(t) = E_p - P_e$$

E_p : potential soil evaporation rate
P_e : effective precipitation rate

Most of the times, the top BC is a flux condition. However, in case of high rainfall intensities, the surface becomes saturated and a pressure head condition must be specified.

In case of prolonged soil evaporation, the situation is more complicated:

- **at the beginning the upward flux is equal to E_p**
- **at a given moment, the soil becomes so dry that: upward flux < evaporative demand ($E_{act} < E_p$)**

Reduction of the pot. evaporation is simulated by changing from a flux to a pressure head condition. When the pressure head becomes more negative than a given value h_{lim}, the pressure head h_{lim} is specified as upper BC.

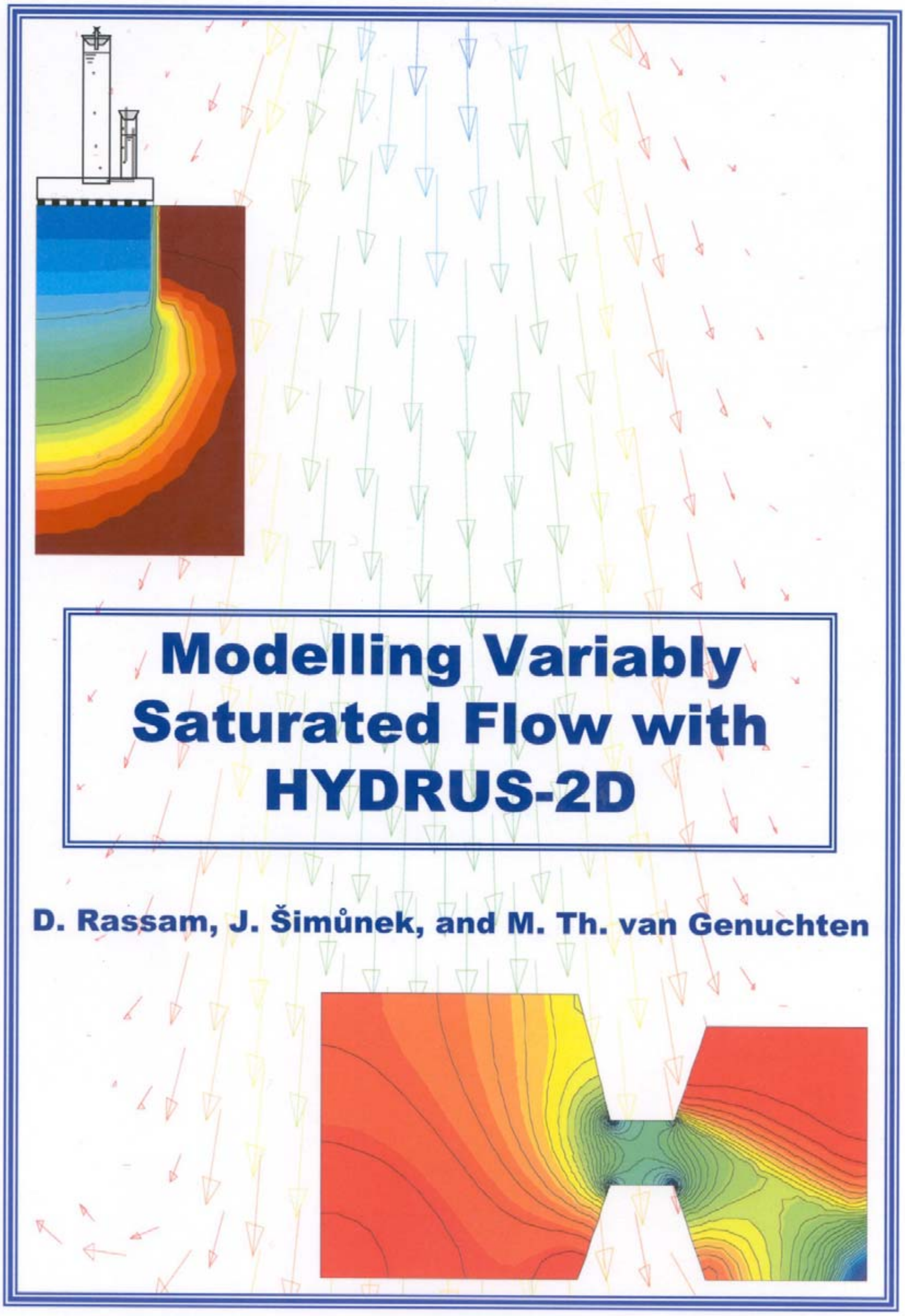
Definition of the bottom boundary condition

The flow situation at the bottom of the soil profile can be specified in different ways, according to the geo-hydrological conditions.

- **A Groundwater (GW) is present; the GW level is given as a function of time (Dirichlet condition)**
- **The pressure head at the bottom is known as a function of time (Dirichlet condition)**
- **The flux through the bottom is known:**
  - ✓ **Assumption of free drainage (Neuman condition)**
  - ✓ **Zero flux (Neuman condition)**
- **.......**

The complete mathematical model includes:

- **the basic equation(s)**
- **the values of the parameters of the model**
- **the initial conditions**
- **the boundary conditions**
- **the description of the geometry of the system (study domain)**



Example of software solving the soil water flow equation

Evaluation of a model

- **Verification : checking of the numerical scheme, quantification of the numerical and truncation errors, etc.**

- **if needed, calibration with part of the data**

- **evaluation of the model:**

  ✓ **reproduction capability : aptitude to fit the observations**

  ✓ **extrapolation capability : to extrapolate system behaviour in conditions similar than the fitting ones, by comparison with a set of measurements not used for calibration**

  ✓ **prediction capability : to predict system behaviour for conditions strongly diffe-rent from the fitting and extrapolating ones. Difficult, since it concerns uno-bserved or non observable events. Can be performed at posteriori, in some ca-ses, after a scenario has been realised.**

Evaluation of a model

- **Graphical tests**

  Graphical comparison between the time course of measured and simulated state variables at different depths (method subjected to personal interpretation).

- **Statistical performance criteria**

  ✓ **comparison of basic summary statistics (mean, standard deviation) for observed and simulated data**

  ✓ **use of statistic tests to compare measured data with simulated data. A model's performance is judged as acceptable if it is not possible to reject the hypothesis of no difference between observed and predicted values**

  ✓ **analysis of residual errors by means of statistical indexes; several indexes can be used.**

Examples of statistical performance indexes

- **Maximum error (ME)**

$$ME = Max\left(P_i - O_i\right)$$

O_i : observed values
n : sample number
P_i : simulated values
$\bar{O}$: mean of obs. values

- **Root mean square error (RMSE)**

$$RMSE = \frac{100}{\bar{O}}\sqrt{\frac{\sum_1^n (P_i - O_i)^2}{n}}$$

- **Model efficiency (EF)**

$$EF = \frac{\sum_1^n \left(O_i - \bar{O}\right)^2 - \sum_1^n \left(P_i - O_i\right)^2}{\sum_1^n \left(O_i - \bar{O}\right)^2}$$

- **Coefficient of residual mass (CRM)**

$$CRM = \frac{\sum_1^n O_i - \sum_1^n P_i}{\sum_1^n O_i}$$

Minimum value of ME and RMSE is 0 (ideal case: observed and simulated values identical).

EF can vary from 1 (ideal case), to strong negative values.

Ideal value for CRM is 0; a negative value indicates a general overestimation of the model.

Etude expérimentale des transferts dans le sol et des échanges sol - nappe - atmosphère

- ***Mesures :*** **variations spatio-temporelles de la teneur en eau et de la charge de pression (ou de la charge hydraulique) dans un profil de sol**

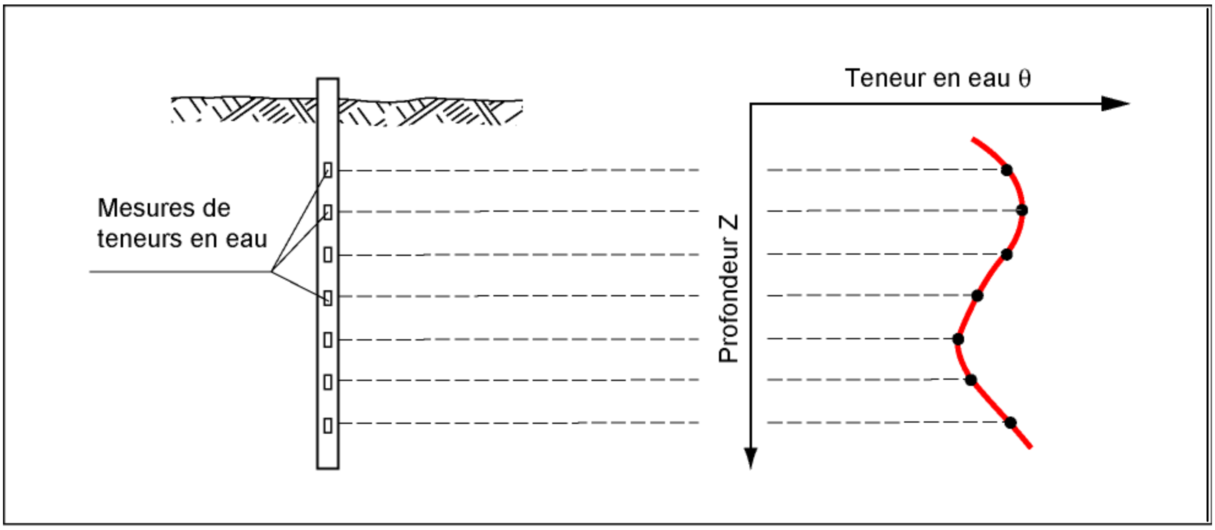
- ***Dispositif expérimental***
  - **équipement de mesure de la teneur en eau (sonde à neutrons, TDR,...)**
  - **batterie de tensiomètres**

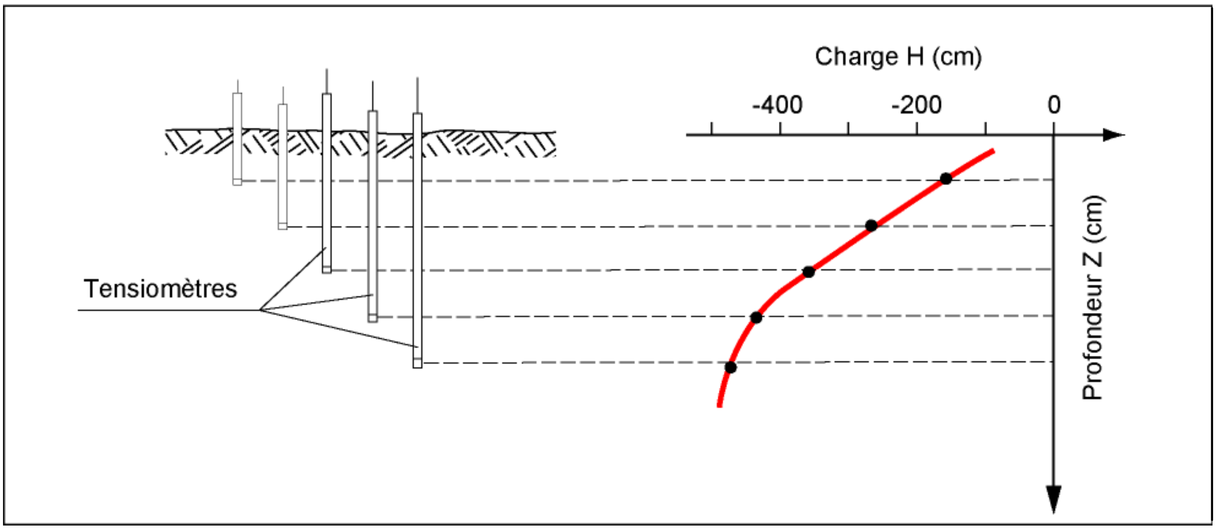
- ***Hypothèses***
  - **écoulement 1 – D vertical**
  - **pas d'extraction racinaire**

- ***Interprétation des mesures***
  - **loi de Darcy** $$\vec{q} = -K(\theta)\frac{\partial H}{\partial z}\vec{k}$$
  - **éq. de continuité** $$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{q}}{\partial z}$$

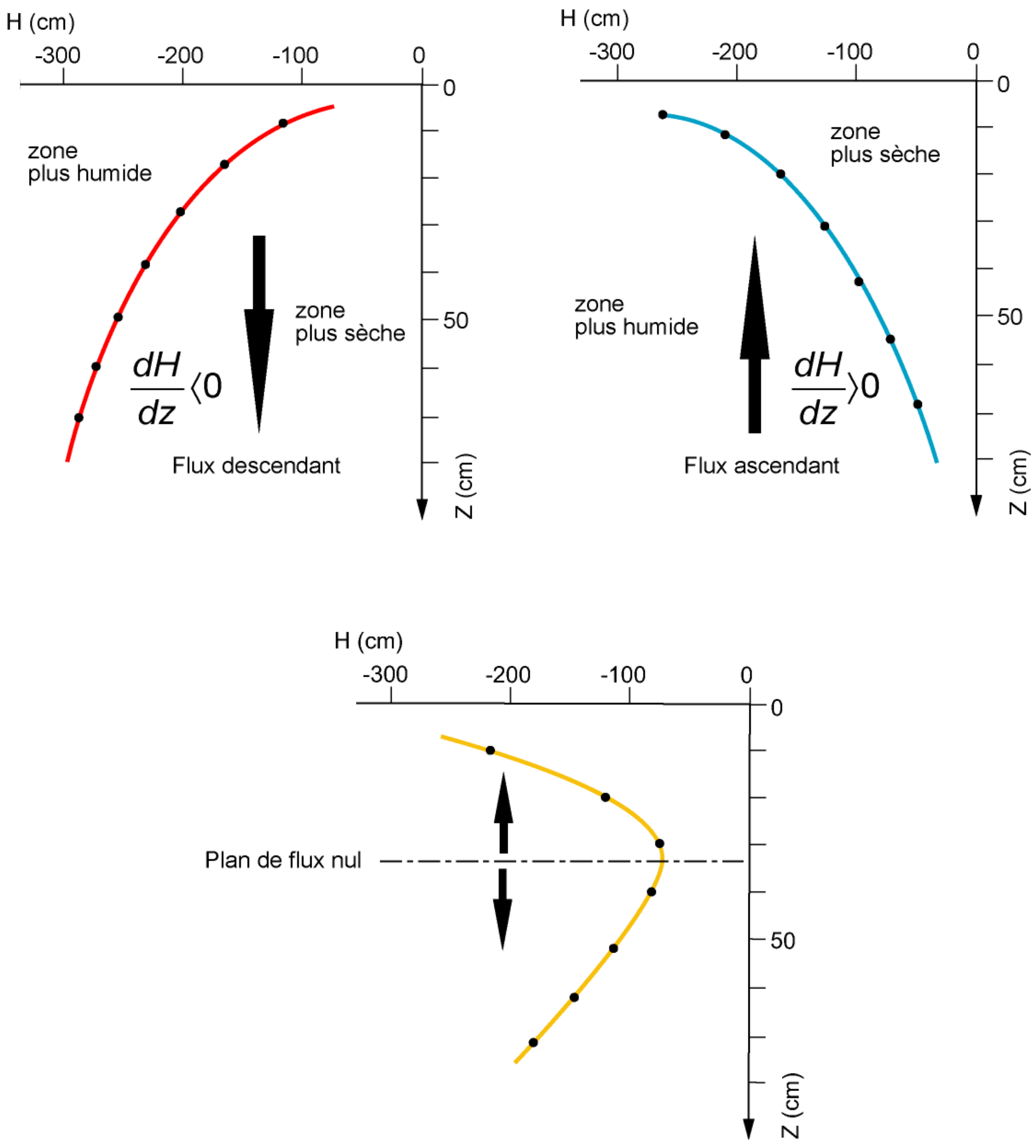
- ***Résultats***
  - **direction de l'écoulement**
  - **valeur du flux moyen entre 2 mesures ou du flux instantané**

Dispositif expérimental pour l'étude des transferts d'eau dans le sol





Estimation de la direction de l'écoulement à partir du signe du gradient de charge hydraulique



Quantification du flux à partir de l'équation de continuité

Eq. de continuité: $$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial z}$$

En intégrant au temps t, entre 2 profondeurs z_1 et z_2:

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial \theta}{\partial t} dz = -\int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial q}{\partial z} dz$$

soit: $$\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_1}^{z_2} \theta \, dz = -\left|q\right|_{z_1}^{z_2} = q_{z_1} - q_{z_2}$$

Variation temporelle du stock S entre z_1 et z_2

Différence de flux entre z_1 et z_2

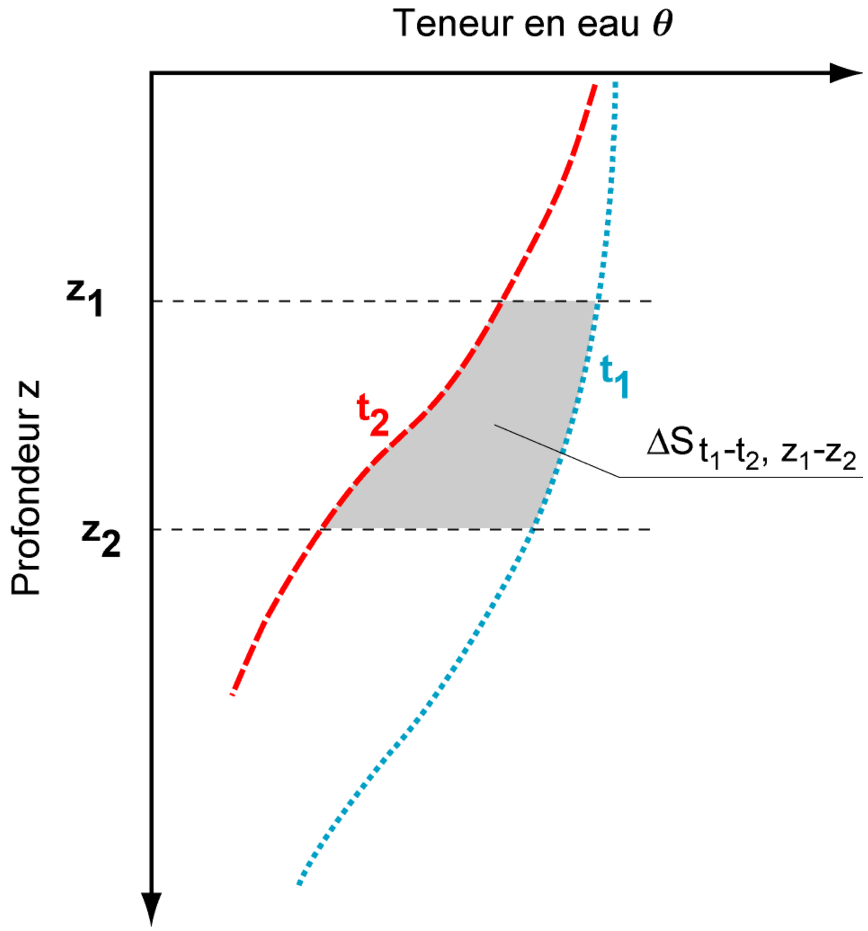
➔ $$\frac{\partial S_{z_1 - z_2}}{\partial t} = q_{z_1} - q_{z_2}$$ ou: $$\boxed{q_{z_2} = q_{z_1} - \frac{\partial S_{z_1 - z_2}}{\partial t}}$$

En terme de flux moyen entre 2 mesures aux temps t_1 et t_2 séparés de Δt:

$$\boxed{q_{z_2} = q_{z_1} - \frac{\Delta S_{z_1 - z_2}}{\Delta t}}$$

Pour pouvoir estimer le flux moyen à une profondeur z_2, il faut donc connaître:

- le flux moyen à une cote quelconque z_1
- la variation du stock d'eau entre les prof. considérées et les temps t_1 et t_2 (profils hydriques)



Estimation de la variation du stock d'eau du sol à partir de 2 profils hydriques relevés à des dates différentes

Quantification expérimentale du flux

$$\boxed{q_{z_2} = q_{z_1} - \frac{\Delta S_{z_1 - z_2}}{\Delta t}}$$

Cas particuliers:

a) *flux nul en surface:* $z_1 = 0 \qquad q_{z_1} = 0$

et donc: $$q_z = -\frac{\Delta S_{o-z}}{\Delta t}$$

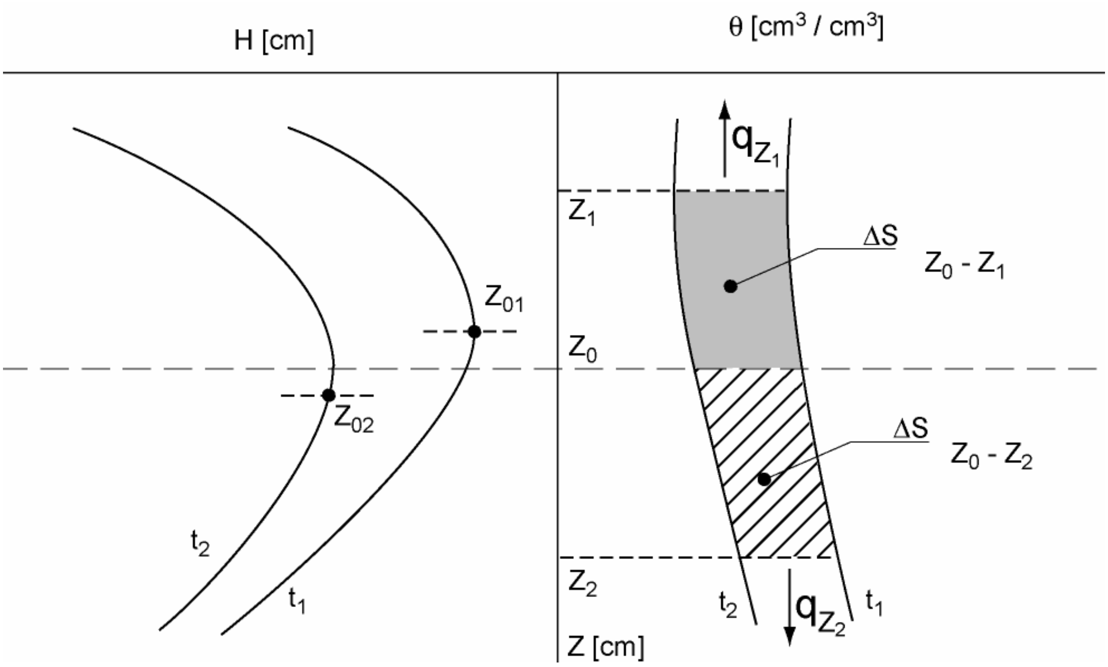
b) *flux connu i en surface:* $z_1 = 0 \qquad q_{z_1} = i$

et donc: $$q_z = i - \frac{\Delta S_{o-z}}{\Delta t}$$

c) *flux nul à une profondeur z_o quelconque:*

$$z_1 = z_o \qquad q_{z_1} = q_{zo} = 0$$

et donc: $$q_z = -\frac{\Delta S_{z_o - z}}{\Delta t}$$



Profils de charge **Profils hydriques**

$$q_{z_1} = \frac{\Delta S_{z_o - z_1}}{\Delta t}$$

$$q_{z_2} = -\frac{\Delta S_{z_o - z_2}}{\Delta t}$$

Méthode du plan de flux nul

Calcul du flux instantané

Données nécessaires

- **connaissance de la fonction de conductivité hydraulique K (θ)**
- **valeur de la teneur en eau à la profondeur z et au temps t considérés** ➔ $\theta_{z,\,t}$
- **valeurs de la charge de pression encadrant la profondeur z, au temps t** ➔ $\left(\dfrac{\Delta H}{\Delta z}\right)_{z,\,t}$

Calcul du flux au moyen de la loi de Darcy

$$\boxed{q_{z,t} = -\; K\left(\theta_{z,t}\right)\left(\frac{\Delta H}{\Delta z}\right)_{z,t}}$$

Determination of the soil hydraulic properties

Soil hydraulic properties (soil water retention function and hydraulic conductivity function) can be determined:

- **from direct field or lab measurements**
- **from inverse optimisation techniques by fitting the solution of the Richards equation to observed variables (θ or ψ) in controlled flow experiments**
- **from Pedo-transfer functions* (PTFs)**

* Functions relating readily available soil properties (percent sand, silt and clay, organic matter content, bulk density, porosity, etc.) with soil hydraulic functions

Détermination in situ des caractéristiques hydrauliques du sol à partir de mesures de terrain

a) **Fonctions $\psi(\theta)$ et $c(\psi)$:** **mesure simultanée de la succion et de la teneur en eau, dans différentes conditions d'humidité.**

La fonction de capacité capillaire $c(\psi)$ s'obtient par dérivation de la relation $\psi(\theta)$: $c(\psi) = -d\theta/d\psi$

b) **Fonctions $K(\theta)$ et $K(\psi)$**

- **méthode par infiltration à flux constant (essais en régime permanent ou transitoire)**
- **méthode du drainage interne**
- **méthode du bilan naturel**

c) **Fonction $D(\theta)$**

$$D(\theta) = -K(\theta)\frac{d\psi}{d\theta}$$

Calculée à partir des fonctions $K(\theta)$ et $\psi(\theta)$

Détermination de la fonction de conductivité hydraulique

Méthode par infiltration à flux constant, en écoulement permanent

- **Principe:** On applique à la surface du sol un flux i inf. à la capacité d'infiltration maximale jusqu'à obtention d'un écoulement uniforme dans la zone de mesures

- **Mesures:** Flux appliqué i et humidité θ

- **Interprétation**

$$q = -K(\theta)\frac{dH}{dz}$$

$$K(\theta) = -\frac{q}{dH/dz} = -\frac{q}{dh/dz - 1}$$

En régime uniforme, h et θ sont constants et q = i

➔ $K(\theta) = i$

i : flux appliqué

θ : teneur en eau (mesurée)

En modifiant le flux appliqué, on obtient, pour chaque valeur de i, un couple de valeurs $K(\theta)$.

- **Inconvénients:**
  - durée de l'essai
  - nécessité d'un simulateur de pluie
  - risques de modifications de l'état de surface

Détermination de la fonction de conductivité hydraulique

Méthode par infiltration à flux constant, en écoulement transitoire

- **Principe:** On réalise une infiltration à flux constant i sur un sol relativement sec.
- **Mesures:** Flux appliqué et évolution temporelle des profils hydriques et des profils de charge pendant l'infiltration.
- **Interprétation**

$$q_{z,t} = -K(\theta_{z,t})\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)_{z,t} \qquad K(\theta_{z,t}) = -\frac{q_{z,t}}{(\partial H/\partial z)_{z,t}}$$

Le flux à une profondeur z et au temps t est donné par:

$$q_{z,t} = i - \left|\frac{\partial S_{0-z}}{\partial t}\right|_t$$

La variation temporelle du stock d'eau S entre la surface et z est calculée à partir des profils hydriques successifs:

$\left|\frac{\partial S_{0-z}}{\partial t}\right|_t$: pente de $S_{0-z} = f(t)$ au temps t

Le gradient de charge $\partial H/\partial z$ est donné par la pente du profil de charge au temps t et à la profondeur z.

La teneur en eau est fournie par le profil hydrique au temps t et à la profondeur z.

Détermination de la fonction de conductivité hydraulique

Méthode du drainage interne

- **Principe:**
  - infiltration préalable pour amener le sol à saturation
  - couverture du sol pour empêcher l'évaporation
  - suivi du ressuyage par des mesures régulières des profils hydriques et des profils de charge

- **Interprétation**

$$q_{z,t} = -K(\theta_{z,t})\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)_{z,t}$$

$$\boxed{K(\theta_{z,t}) = -\frac{q_{z,t}}{(\partial H/\partial z)_{z,t}}} \quad \text{ou:} \quad \boxed{K(\psi_{z,t}) = -\frac{q_{z,t}}{(\partial H/\partial z)_{z,t}}}$$

$$q_{z,t} = -\left|\frac{\partial S_{0-z}}{\partial t}\right|_t$$ pente de $S_{0\text{-}z} = f(t)$ au temps t

$\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)_{z,t}$ pente du profil de charge à la profondeur z et au temps t

$\theta_{z,t}$ ou $\psi_{z,t}$ teneur en eau ou succion à la profondeur z et au temps t

- **Inconvénients:**
  - suivi des profils difficiles en sols très perméables
  - ressuyage très lent aux faibles humidités

- **Avantage:** pas de simulateur de pluie