Algèbre linéaire avancée II
printemps 2020

Série 14

Exercice 1.

i) Montrer que $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

ii) Montrer que $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \not\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

iii) Soient $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ tel que $m \mid n$. Montrer qu'il existe un homomorphisme surjectif de groupes

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

Exercice 2. Si H est un sous-groupe normale de G, $H \lhd G$, et $|H| = 2$, montrer que $H \subseteq Z(G)$, où

$$Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz \ \forall\, g \in G\}.$$

Exercice 3. Soit $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ de rang ligne plein. Soit $B \in \mathbb{Z}^{m\times m}$ une base de $\Lambda(A)$ (i.e. $\Lambda(B) = \Lambda(A)$). Montrer que B est inversible (sur $\mathbb{Q}$).

Exercice 4. Soient $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ et $A' \in \mathbb{Z}^{m\times n'}$ deux matrices de rang ligne plein.
Montrer que si $\Lambda = \Lambda(A) \subseteq \Lambda(A') = \Lambda'$, alors $\det(\Lambda') \mid \det(\Lambda)$.

Exercice 5. Soient $\mathbb{C}^\star = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{C} \mid \Re(r) > 0,\ \Im(r) = 0\}$ et $S = \{c \in \mathbb{C} \mid |c| = 1\}$.

i) Montrer que $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^\star, \cdot)$.

ii) Montrer que $(S, \cdot)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^\star, \cdot)$.

iii) Montrer que $\mathbb{C}^\star/\mathbb{R}_+ \simeq S$.

Exercice 6. Soit $\Lambda(B) \subseteq \mathbb{Z}^n$ un réseau entier pour une matrice inversible $B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, $d = |\det(B)|$, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire standard. Soit $D = d(B^{-1})^\intercal$.

i) Montrer que $D \in \mathbb{Z}^{n\times n}$.

ii) Soient $x \in \Lambda(B)$, $y \in \Lambda(D)$. Montrer que $\langle x, y\rangle \in d\mathbb{Z}$.

iii) Soit $z \in \mathbb{R}^n$, et $\langle x, z\rangle \in d\mathbb{Z}$ pour tout $x \in \Lambda(B)$. Montrer que $z \in \Lambda(D)$.

Exercice 7. Soit G un groupe abélien généré par g_1, g_2, g_3 avec les relations

$$\begin{aligned} -25g_1 + 7g_2 + 11g_3 &= 0, \\ 18g_1 - 4g_2 - 8g_3 &= 0, \\ -10g_1 + 2g_2 + 4g_3 &= 0. \end{aligned}$$

Utilizer la forme normale de Smith pour trouver des générateurs $h_1, \ldots, h_m$ et nombres entiers $k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tels que G est le groupe généré par $h_1, ..., h_m$ avec les relations $k_i h_i = 0$.

Indication:

$$\begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Soit $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ et $d \in \mathbb{Z}$ un nombre entier qui divise chaque composante de A. Si $U \in \mathbb{Z}^{m\times m}$ et $V \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ sont des matrices unimodulaires, alors d divise chaque composante de $U \cdot A \cdot V$.