Prof. Friedrich Eisenbrand 19 mai 2020

Algèbre linéaire avancée II
printemps 2020

Série 13

Exercice 1. Soit $U \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ une matrice unimodulaire.

i) Montrer que U^{-1} est aussi unimodulaire.

ii) Montrer que $\mathbb{Z}^n = \{Uz \mid z \in \mathbb{Z}^n\}$, c'est-à-dire que U est un automorphisme sur $\mathbb{Z}^n$.

Exercice 2. Soit $U \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ une matrice unimodulaire. Montrer qu'il existe un $m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ et des matrices E_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$ tels que

i) chaque E_i représente une opération élémentaire unimodulaire (cf. définition 5.4),

ii) on a $U = E_1 \cdot E_2 \cdots E_m$.

Exercice 3. Utiliser l'algorithme d'Euclide étendu pour calculer p, q avec

$$\gcd(1463, 1235) = 1463p + 1235q.$$

Exercice 4. Montrer que le système $Ax = 0$ a une solution $0 \neq z^\star \in \mathbb{Z}^n$ pour chaque matrice $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ avec $m < n$.

Exercice 5. Parmi les matrices suivantes, lesquelles génèrent le même réseau?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(Vous pouvez utiliser le fichier python sur la page web du cours (piazza).)

Exercice 6. Soit $G = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ un matrice symétrique, unimodulaire, et définie positive. Montrer qu'il existe une matrice unimodulaire U telle que $G = U^\intercal U$.

Indication: Regarder ac. Si $ac \geq 2$, est-ce qu'il y a une matrice unimodulaire U t.q. $U^\intercal G U = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$ avec $ac > a'c'$?

Exercice 7. Montrer qu'un réseau entier $\Lambda(A)$, pour une matrice $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ de rang ligne plein, est un groupe abélien.

Exercice 8. Montrer que d dans le lemme 5.6 est le gcd de la première ligne de A. En d'autres mots, montrer le lemme suivant.

<u>*Lemme.*</u> Soit $A \in Z^{m\times n}$ une matrice en nombres entiers de plein ligne rang, alors il existe une matrice unimodulaire $U \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, tel que la première ligne de AU est de la forme $(d, 0, \dots, 0)$ où $d = \gcd(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,n})$.

Exercice 9. Calculer la forme normale de Smith pour

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 9 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 21 & 0 & 8 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 9 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & -5 & 15 & 0 & 10 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

(Vous pouvez utiliser le fichier python sur la page web du cours (piazza).)