Prof. Friedrich Eisenbrand 12 mai 2020

---

**Algèbre linéaire avancée II**
printemps 2020

---

**Série 12**

---

**Exercice 1.** Compléter la preuve du théorème 4.22: Montrer que les orbites de

$$x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_\ell$$

engendrent encore $V$. (Où les $x_i$ et $y$ sont les mêmes que dans le démonstration du théorème 4.22).

**Exercice 2.** Soit $T\colon V \to V$ un endomorphisme. Soit $\phi : V \to \mathbb{C}^n$ l'isomophisme associé à une base $B$ de $V$. Supposons que $A_B$, la matrice de $T$ relativement à la base $B$, admette une forme normale de Jordan $J$ avec matrice de passage $P$.
Montrez qu'il existe des sous-espaces $V_1, ..., V_k$ de $V$ tels que

*a)* $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$,

*b)* $\forall i$: $T(V_i) \subset V_i$ et $T_{|V_i} = N_i + \lambda_i I$, où $N_i\colon V_i \to V_i$ est nilpotente, et $\{\lambda_1, ..., \lambda_k\} = \{J_{11}, ..., J_{nn}\}$.

**Exercice 3.** Soit $T\colon V \to V$ un endomorphisme et soit $V_1, ..., V_k$ une décomposition de $V$ tel que $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$, $T(V_i) \subseteq V_i$ et $T_{|V_i} = N_i + \lambda_i I$, où $N_i : V_i \to V_i$ est nilpotente. Montrez que :

*a)* $V_i \subseteq \ker(T - \lambda_i I)^{a_i}$ pour un entier $a_i$ tel que $N_i^{a_i} = 0$.

*b)* Les $\lambda_1, ..., \lambda_k$ sont des valeurs propres (pas forcément distinctes) de $T$. (*Indice* : Prendre $v_i \in V_i$ bien choisi).

*c)* Le polynôme $f(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - \lambda_i)^{a_i}$ annule $T$. (*Indice* : Montrer que $f(T)(v) = 0$ pour tout $v \in V$ en utilisant la décomposition de $V$ et le premier point).

*d)* En déduire que l'ensemble $\{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ contient toutes les valeurs propres de $T$ (*Indice* : Si $v \neq 0$ est un vecteur propre de $T$ de valeur propre $\lambda$, exprimer $f(T)(v)$ en fonction de $f$, $\lambda$, et $v$).

*e)* En déduire que les valeurs sur la diagonale de n'importe quelle forme normale de Jordan de $T$ constituent l'ensemble des valeurs propres de $T$. (*Indice* : Utiliser l'exercice 2.)

**Exercice 4.** Vrai ou faux:

*a*) Si $J$ est la forme normale de Jordan pour une matrice $A$, $J^2$ est la forme normale de Jordan pour $A^2$.

*b*) Si $A$ et $B$ sont deux matrices $\in \mathbb{C}^{n\times n}$, les matrices $AB$ et $BA$ ont les mêmes formes normales de Jordan.

**Exercice 5.** Donner la forme normale de Jordan $J$ pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & -3 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 6.** Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Montrer qu'il existe un polynôme $m_A(x) \in \mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$ de degré minimal et dont le coefficient du monôme dominant est 1 tel que $m_A(A) = 0$. De plus, montrer que $m_A(x)$ est unique.

Le polynôme $m_A(x)$ est appelé le *polynôme minimal de $A$*.

**Exercice 7.** Soit $J$ un bloc Jordan de taille $k \times k$ avec $\lambda$ sur la diagonale. Montrer que

*a*) Le polynôme caractéristique de $J$ est $p_J(t) = (\lambda - t)^k$.

*b*) $J$ possède $\lambda$ comme seule valeur propre.

*c*) Le polynôme minimal de $J$ est $m_J(t) = (\lambda - t)^k$.

*d*) La multiplicité géométrique de $\lambda$ est 1.

**Exercice 8.** Soient $a, b, \lambda \in \mathbb{Z}$, et $a \neq 0$. Montrer que

$$g \mid a \text{ et } g \mid b \qquad \Leftrightarrow \qquad g \mid b \text{ et } g \mid (a - \lambda b).$$

Conclure que $\gcd(a, b) = \gcd(b, a - \lambda b)$.

**Exercice 9.** Soient $n \geq 2$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ pas tous égaux à zéro. On définit

$$\gcd(a_1, \ldots, a_n) := \max\{z \in \mathbb{Z} : \; z \mid a_1, \; z \mid a_2, \ldots, z \mid a_n\}$$

comme le plus grand diviseur commun de $a_1, \ldots, a_n$. Montrer:

*i*) $\gcd(a_1, \ldots, a_n) = \min\{x_1a_1 + \cdots + x_na_n \; : \; x_1a_1 + \cdots + x_na_n \geq 1, \; x_i \in \mathbb{Z}, \; i = 1, \ldots, n\}$.

*ii*) $\gcd(a_1, \ldots, a_n) = \gcd(\gcd(a_1, a_2), a_3, \ldots, a_n)$ pour $n \geq 3$.