Algèbre linéaire avancée II
printemps 2020

Série 11

Exercice 1.

a) Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$. Trouver e^{tA}, où

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

b) Trouver la solution du système suivant :

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + 5x_2 \\ x_2' &= -5x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

sujet aux conditions initiales $x_1(0) = 2$ et $x_2(0) = -1$.

Exercice 2. On considère un système différentiel $x' = Ax$ et on suppose que A est une matrice nilpotente, si bien que $A^m = 0$ pour un certain entier $m > 0$. Montrer que, dans une solution $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, chaque fonction $x_i(t)$ est un polynôme en t et qu'il est de degré au plus $m - 1$.

Exercice 3. Soient f et g des polynômes sur $\mathbb{Z}[t]$. Si le polyôme $g(t)$ a 1 comme coefficient devant le plus haut degré (i.e., $g(t) = t^m + b_{m-1}t^{m-1} + \cdots + b_1 t + b_0$), montrer que quand on exprime f avec la décomposition $f = qg + r$ avec $\deg(r) < \deg(g)$, alors les polynômes q et r sont sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 4. Dans chacun des cas suivants, écrire $f = qg + r$, avec $\deg(r) < \deg(g)$.

a) $f(t) = t^2 - 2t + 1$, $g(t) = t - 1$,

b) $f(t) = t^3 + t - 1$, $g(t) = t^2 + 1$,

c) $f(t) = t^3 + t$, $g(t) = t$,

d) $f(t) = t^3 - 1$, $g(t) = t - 1$.

Exercice 5. Soit f un polynôme sur $\mathbb{K}[t]$ de degré n. Alors il y a au plus n racines de f dans $\mathbb{K}$.

Exercice 6. Soit $f(t)$ un polynôme avec des coefficients réels. Soit α une racine de f complexe mais pas réelle. Montrer que $\bar{\alpha}$ est aussi une racine de f.

Exercice 7 (Algorithme d'Euclide étendu)**.** Soient f et g deux polynômes non-nuls sur un corps $\mathbb{K}$. Montrer qu'il existe deux polynômes p et q sur $\mathbb{K}[t]$ tels que

$$f(t)q(t) + g(t)p(t) = d, \quad d \in \mathrm{gcd}(f, g),$$

avec $\deg(q) < \deg(g) - \deg(d)$, et $\deg(p) < \deg(f) - \deg(d)$.