Algèbre linéaire avancée II
printemps 2020

Série 10

Exercice 1. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in K^{m\times n}$ avec pseudoinverse A^+. Montrer que la pseudoinverse satisfait les relations suivantes:

1. $A^+ = A^+(A^+)^*A^*$.
2. $A = AA^*(A^+)^*$.
3. $A^* = A^*AA^+$.
4. $A^+ = A^*(A^+)^*A^+$.
5. $A = (A^+)^*A^*A$.
6. $A^* = A^+AA^*$.

Exercice 2. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in K^{m\times n}$ avec pseudoinverse A^+. Montrer que en général on a

$$(AA^*)^+ = (A^*)^+A^+ \,. \tag{1}$$

Donc utiliser (1) pour montrer

$$A^+ = A^*(AA^*)^+ = (A^*A)^+A^* \,.$$

Indication: Utiliser les résultats de l'exercice 1.

Exercice 3. Montrer Lemme 4.3 dans la polycopié:
On considère le système suivant

$$\begin{array}{rcllll} \mathbf{x}_1'(t) & = & a_{11}\mathbf{x}_1(t) & +\cdots+ & a_{1n}\mathbf{x}_n(t) \\ \mathbf{x}_2'(t) & = & a_{21}\mathbf{x}_1(t) & +\cdots+ & a_{2n}\mathbf{x}_n(t) \\ & \vdots & & & \\ \mathbf{x}_n'(t) & = & a_{n1}\mathbf{x}_1(t) & +\cdots+ & a_{nn}\mathbf{x}_n(t) \end{array} \tag{2}$$

où les $a_{ij} \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\mathscr{X} = \{\mathbf{x} \colon \mathbf{x} \text{ est une solution du système (2)}\}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit $B = \{u_1 + i \cdot w_1, \ldots, u_n + i \cdot w_n\}$ une base de $\mathbb{C}^n$ où $u_j, w_j \in \mathbb{R}^n$ pour tout j. Pour $X \subseteq \mathbb{R}^n$ avec $|X|$ finie, écrire $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{X\} := \{\sum_{x \in X} \alpha_x x : \alpha_x \in \mathbb{R}\, \forall x \in X\}$. Montrer que

$$\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{u_j, w_j : 1 \leq j \leq n\} = \mathbb{R}^n.$$

Exercice 5. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Montrer que $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$.

Exercice 6. Soient $A, B, P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ telles que P est inversible et $A = P^{-1}BP$. Montrer que $e^A = P^{-1} e^B P$.

Exercice 7. Trouver e^{tA} pour chacune des matrices suivantes :

a) $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$, où $x, y \in \mathbb{C}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Une matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ qui satisfait $A^2 = 0$.

d) Une matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ qui satisfait $A^2 = A$.

Exercice 8.

1. Soit $x \in \mathbb{C}$, et soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix}$. Utiliser les matrices A et B pour montrer que $e^{A+B} = e^A e^B$ est faux en général.
2. Soient $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ deux matrices commutatives. Montrer que $e^{A+B} = e^A e^B$.

Exercice 9. Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Montrer que la matrice e^A est non-singulière, et trouver sa matrice inverse.