Algèbre linéaire avancée II
printemps 2020

Série 9

Exercice 1. Montrer la partie (3.5) du Théorème 3.13: Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Si U dénote un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, montrer que

$$\lambda_k = \min_{dim(U)=n-k+1} \max_{x\in U\setminus\{0\}} R_A(x).$$

Exercice 2. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ une matrice de rang r, et soit une SVD de A, i.e. $P \in \mathbb{K}^{m\times m}$ et $Q \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sont des matrices unitaires telles que $A = PDQ$, avec $D \in \mathbb{K}^{m\times n}$ diagonale. Montrer que les matrices A^*, A^*A et AA^* sont de rang r.

Indication: Montrer que A et D ont le même rang et que A^*A et D ont le même rang.

Exercice 3. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in K^{m\times n}$ avec une decomposition en valeurs singulières $A = PDQ$. La pseudoinverse de A est définie comme $A^+ = Q^*D^+P^*$, où D^+ est la matrice définie dans la Définition 3.8. Montrer que A^+ satisfait les quatre conditions de Penrose:

1. $AA^+A = A$.
2. $A^+AA^+ = A^+$.
3. $(AA^+)^* = AA^+$.
4. $(A^+A)^* = A^+A$.

Exercice 4. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in K^{m\times n}$ avec pseudoinverse A^+. Montrer les propriétés suivantes de la matrice pseudoniverse:

1. $(A^+)^+ = A$.
2. $(A^+)^* = (A^*)^+$.

Exercice 5. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in K^{m\times n}$ et $B \in K^{n\times p}$. Est-il toujours vrai que $(AB)^+ = B^+A^+$?

Exercice 6. Trouver la solution minimale des trois systèmes d'équations:

$$1.\ x_1 + x_2 = b_1\,, \quad 2. \begin{cases} x_1 = b_1\,, \\ x_1 = b_2\,, \\ x_1 = b_3\,, \end{cases} \quad 3. \begin{cases} 4x_1 = b_1\,, \\ 0x_1 = b_2\,, \\ 7x_3 = b_3\,, \\ 0x_2 = b_4\,. \end{cases}$$

Exercice 7. Considérer l'ensemble de points

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Trouver un sous-espace de dimension 1 $H \trianglelefteq \mathbb{R}^2$ atteignant

$$D := \min_{\substack{H \trianglelefteq \mathbb{R}^2 \\ \dim(H)=1}} \sum_{a \in M} \mathrm{dist}(a, H)^2$$

et déterminer D.

Exercice 8. Soit $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Montrer que

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$$

Exercice 9.

1. Pour les matrices $P \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $Q \in \mathbb{R}^{n \times d}$, soit p_i la i-ème colonne de P, et q_i^T la i-ème ligne de Q. Montrer que

$$PQ = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i^T.$$

2. Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ une matrice avec décomposition en valeurs singulières $A = PDQ$, avec r valeurs singulières $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$, $r \leq d$. Montrer qu'on a

$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i p_i q_i^T.$$

3. Conclure que l'on peut représenter A comme

$$A = URV, \qquad U \in \mathbb{R}^{m \times r},\ R \in \mathbb{R}^{r \times r},\ V \in \mathbb{R}^{r \times d},$$

où la matrice U est composée des premières r colonnes de P, V est composée des premières r lignes de Q, et R est une matrice diagonale avec les r valeurs singulières sur sa diagonale.