Algèbre linéaire avancée II
printemps 2020

Série 8

Exercice 1. Pour chaque forme suivante Q, décider si Q est définie positive, définie négative ou indéfinie. Si Q est indéfinie, trouver un vecteur x tel que $Q(x) > 0$ et un vecteur y tel que $Q(y) < 0$.

a) $Q(x) = 13x_1^2 + 8x_1x_2 + 7x_2^2$

b) $Q(x) = 11x_1^2 + 16x_1x_2 - x_2^2$

Exercice 2. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique.

a) Montrer que A est définie négative, si et seulement si $(-1)^k \det(B_k) > 0$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

b) Montrer que A est semi-définie négative, si et seulement si $(-1)^{|K|} \det(B_K) \geq 0$ pour tout $K \subseteq \{1, \ldots, n\}$.

Exercice 3.

1. Soient $G, H \subseteq \mathbb{R}^n$ des sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ avec le produit scalaire standard tels que $k = \dim(G) > \dim(H)$. Montrer que G possède une base orthonormale $w_1, \ldots, w_k$ telle que $w_k \perp H$.

2. Pour deux matrices $A, B \in K^{n\times n}$, montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Exercice 4. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Soit $K = \{l_1, \ldots, l_{n-k}\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ où $1 \leq l_1 < \cdots < l_{n-k} \leq n$ et soit $B \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$ une sous-matrice symétrique de A définie par $B_{ij} = A_{l_i l_j}$ (ainsi K marque les lignes et les colonnes de A qui apparaissent dans la matrice B.)

Soient $\mu_1 \geq ... \geq \mu_{n-k}$ les valeurs propres de B. Montrer que $\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{i+k}$, pour $i = 1, \ldots, n-k$.

Exercice 5. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ une matrice de rang r, et soient $P \in \mathbb{K}^{m\times m}$ et $Q \in \mathbb{K}^{n\times n}$ des matrices unitaires telles que $A = PDQ$, avec $D \in \mathbb{R}^{m\times n}_{\geq 0}$ diagonale et $d_{i,i} \geq d_{i+1,i+1}$ pour $i = 1, \ldots, \min\{n-1, m-1\}$.

Montrer que les colonnes de Q^* sont les vecteurs propres de A^*A, que celles de P sont les vecteurs propres de AA^*, et que les coefficients positifs diagonaux de D sont les valeurs singulières de A.

Exercice 6. Déterminer les valeurs singulières des matrices suivantes. Pour les matrices A_3 à A_6 donner aussi la décomposition en valeurs singulières (SVD).

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7.

1. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ une matrice carrée inversible. Déterminer une décomposition SVD de A^{-1}.

2. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ est une matrice carrée inversible, alors $|\det(A)|$ est égal au produit des valeurs singulières de A.

3. Montrer que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice carrée symétrique définie positive, alors ses valeurs singulières sont ses valeurs propres.

4. Montrer que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice carrée symétrique, alors ses valeurs singulières sont les valeurs absolues de ses valeurs propres non-nulles.

Exercice 8. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre rponse.

1. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice orthogonale, alors une décomposition de A en valeurs singulières est $A = AI_nI_n$.

2. Les valeurs singulières d'une matrice diagonale $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sur la diagonale sont les valeurs diagonales $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.