
L'exercice peut être rendu aux assistants le mardi 5 mai avant la leçon d'exercice.

Étudiant(e) :

Salle :

Exercice 10 : *Cette question est notée sur 8 points.*

0 1 2 3 4 5 6 7 8

Réservé au correcteur

On considère le système

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_1(t) &= x_1(t) - 2x_2(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) &= -2x_1(t) + x_2(t)\end{aligned}$$

avec les conditions initiales : $x_1(0) = \alpha$ et $x_2(0) = \beta$.

- Écrire le système en notation de vecteur matrice comme $x' = Ax$ et $x(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.
- Trouver les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice A .
- Trouver la matrice S telle que $e^{tA} = Se^{t\Lambda}S^{-1}$, où

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(voir série 10, exercice 6).

- Résoudre l'équation $x(t) = e^{tA}x(0)$ pour trouver une solution du système original.