L'exercice peut être rendu par e-mail aux assistants le mardi 28 avril avant la leçon d'exercice.

Étudiant(e) :

Salle :

Exercice 9 : *Cette question est notée sur 8 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 *Réservé au correcteur*

Montrer le Théorème 3.19 : Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique et $f(x) = x^T A x$ la forme quadratique correspondante à A. Soit

$$A = U \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} U^T$$

une factorisation de A telle que $U = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est orthogonale et $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Pour $1 \leq \ell < n$ on a

$$\max_{\substack{x\in S^{n-1} \\ x\perp u_1,\dots,x\perp u_\ell}} f(x) = \lambda_{\ell+1} = \min_{\substack{x\in S^{n-1} \\ x\perp u_{\ell+2},\dots,x\perp u_n}} f(x) \tag{1}$$

et $u_{\ell+1}$ est une solution optimale.