Algèbre linéaire avancée II
printemps 2020

Série 6

Exercice 1.

1. Soient V un espace vectoriel de dimension finie, $f : V \to K$ une forme linéaire, et B, B' des bases de V. Soit
$$f(x) = a^\top [x]_B,$$
avec $a \in K^n$. Décrire $f(x)$ en termes de $P_{B'B}$ et $[x]_{B'}$.

2. Soient V un espace vectoriel de dimension finie, $f : V \times V \to K$ une forme bilinéaire, et B, B' des bases de V. Soit
$$f(x, y) = [x]_B^\top A_B^f [y]_B.$$
Décrire $f(x, y)$ en termes de $P_{B'B}$, $[x]_{B'}$ et $[y]_{B'}$. *Rappel*: La matrice $P_{B'B}$ est la matrice de passage qui transforme un vecteur de la base B' dans la base B.

Exercice 2. Donner un exemple pour le Théorème 2.28, c'est-à-dire trouver un espace vectoriel V ainsi qu'une forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ symétrique sur V et un sous-espace vectoriel $W \subseteq V$ tels que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est dégénérée sur V, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{|W \times W}$ est non dégénérée sur W et $V = W \oplus W^\perp$.

Exercice 3. Démontrer la proposition 2.30: Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie et soit B une base de V. Une forme sesquilinéaire f est une forme hermitienne si et seulement si A_B^f est hermitienne. (On appelle une matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitienne si $A = \overline{A^T}$.)

Exercice 4. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ tel que $\dim(V) = 3$ et $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ une base de V. Pour les matrices $A_i \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ ci-dessous et les applications définies par $f_i(x, y) = [x]_B^T A_i \overline{[y]_B}$, cocher ce qui s'applique :

	A_1	A_2	A_3
$f_i(x, y)$ est une forme sesquilinéaire			
$f_i(x, y)$ est une forme hermitienne			

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1+i & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1+2\cdot i & 3-i \\ 1-2\cdot i & 0 & 2-i \\ 3-i & 2+i & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Modifier l'algorithme 2.1 afin qu'il calcule une matrice diagonale congruente complexe par rapport à une matrice hermitienne $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

Exercice 6. Soit V un espace hermitien. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\ \|v\| \qquad \forall\ u, v \in V.$$

Exercice 7. Montrer qu'un espace hermitien V de dimension $n \in \mathbb{N}_{>0}$ possède une base B tel que $\langle x, y\rangle = [x]_B^T \cdot \overline{[y]_B}$, où $x^\intercal \cdot \overline{y} = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ est le produit hermitien standard dans $\mathbb{C}^n$.