Algèbre linéaire avancée II
printemps 2020

Série 5

Exercice 1. Soient $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$, une base d'un espace euclidien V de dimension finie et $B^\star = \{b_1^\star, \ldots, b_n^\star\}$ la base orthogonale résultant du procédé de Gram-Schmidt sur B. Laquelle des assertions suivantes est vraie ?

- ☐ *a*) $\operatorname{span}\{b_k, \ldots, b_n\} = \operatorname{span}\{b_k^\star, \ldots, b_n^\star\}$ pour tout $k = 1, \ldots, n$.
- ☐ *b*) Pour un vecteur $p \in V$ où $p = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i = \sum_{i=1}^n \beta_i b_i^\star$, avec $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$. Si $\alpha_k = 0$ alors $\beta_k = 0$ pour tout $k = 1, \ldots, n$.
- ☐ *c*) $\|b_k^\star\| \leq \|b_k\|$ pour tout $k = 1, \ldots, n$.
- ☐ *d*) Pour un vecteur $p \in V$ où $p = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i = \sum_{i=1}^n \beta_i b_i^\star$, avec $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$. Si $\alpha_k \neq 0$ alors $\beta_k \neq 0$ pour tout $k = 1, \ldots, n$.

Exercice 2. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension fini, muni d'une forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ une base orthogonale et $U = \operatorname{span}\{b_i : i = 1, \ldots, n,\ \langle b_i, b_i \rangle > 0\}$. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ restreint à U est un produit scalaire du sous-espace U.

Exercice 3. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire ordinaire dans $\mathbb{R}^n$. Trouver une factorisation $A = A^* R$ du corollaire 2.19 de la matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times n}.$$

Exercice 4. Soient les vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la distance entre u et $V = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$? La distance entre u et V est $dist(u, V) = \min_{v \in V} \|u - v\|$, où la norme $||\cdot||$ est par raport au produit scalaire ordinaire.

Exercice 5. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 12 \\ -13 \\ 10 \end{pmatrix}$. Alors, la solution des moindres carrés $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ du problème $\min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - b\|^2$ satisfait

☐ *a)* $x_2 = 3$. ☐ *b)* $x_2 = -3$.
☐ *c)* $x_2 = 4$. ☐ *d)* $x_2 = -4$.

Exercice 6. Soient v_1 et $v_2 \in \mathbb{Z}_2^4$ donnés par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On considère la forme bilinéaire standard $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i$. Trouver une base de $\operatorname{span}\{v_1, v_2\}^{\perp}$. Est-ce que
$\mathbb{Z}_2^4 = \operatorname{span}\{v_1, v_2\} \oplus \operatorname{span}\{v_1, v_2\}^{\perp}$?

Exercice 7. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire. Montrer que $V = W \oplus W^{\perp}$ est satisfait pour tout sous-espace $W \subseteq V$. Conclure que $\dim V = \dim W + \dim W^{\perp}$.

Exercice 8. On considère l'espace euclidien $C([0,1])$ des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$ avec une fonction définie par

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : C([0,1]) \times C([0,1]) &\to \mathbb{R} \\ \langle f, g \rangle &\mapsto \int_0^1 f(x) g(x)\, dx. \end{aligned}$$

(i) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

(ii) Soit V le sous espace engendré par $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$. Trouver une base orthonormale de V.

(iii) Sois V le sous espace engendré par $\{1, x, x^2\}$. Trouver une base orthonormale de V.