Algèbre linéaire avancée II
printemps 2020

Série 4

Exercice 1. Soient V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ un ensemble de vecteurs deux à deux orthogonaux.

a) Montrer le théorème de Pythagore généralisé : $\|v_1 + \ldots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \ldots + \|v_n\|^2$.

b) Montrer que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est un ensemble libre si pour tout i, $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$.

Exercice 2. Soit V un espace euclidien de dimension finie avec une base orthonormale $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

1. Montrer que pour tout $v \in V$,

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle \, v_i.$$

2. Pour $f, g \in V$, montrer l'*identité de Parseval* :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle f, v_i \rangle \langle v_i, g \rangle \, .$$

Exercice 3. Soient V un K-espace vectoriel avec une base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une forme bilinéaire symétrique, et $P \in K^{n \times n}$ inversible telle que $P^T A_B^{\langle \cdot, \cdot \rangle} P$ est une matrice diagonale.

Montrer que les elements $u_k \in V$ tels que $[u_k]_B = P_k$, où P_k est la k-ième colonne de P, forment une base orthogonale de V.

Exercice 4. Soient V un espace vectoriel de dimension n sur un corps K muni d'une forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot, \cdot \rangle$, B une base, et $A_B^{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ la matrice correspondante. L'espace de nullité est défini par $V_0 := \{v \in V \mid \langle v, x \rangle = 0 \; \forall x \in V\}$, et $f : K^n \to K^n$ est définie par $f(x) = A_B^{\langle \cdot, \cdot \rangle} x$.

Montrer que $\dim(\ker(f)) = \dim(V_0)$.

Exercice 5. Soit $V = \mathbb{R}^2$ avec la forme bilinéaire symétrique

$$\langle x, y \rangle = x^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y.$$

Dessiner l'ensemble $V_+ = \{v \in V : \langle v, v \rangle > 0\} \cup \{0\}$. Est-ce que V_+ est un sous-espace de V?

Exercice 6. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2$ la forme bilinéaire symétrique

$$\langle x, y \rangle = x^\mathsf{T} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y.$$

Montrer que $\mathbb{Z}_2^2$ ne possède pas de base orthogonale.

Exercice 7. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{Z}_3$, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ une base V et $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{Z}_3$ une forme bilinéaire symétrique t.q.

$$A_B^{\langle \cdot, \cdot \rangle} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une base orthogonale de V.