
Algèbre linéaire avancée II
printemps 2020

Série 3

Exercice 1. Soit $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

1. Les matrices A et B sont semblables si et seulement si elles ont le même spectre.

TRUE

FALSE

2. Si les matrices A et B ont le même spectre $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ et sont toutes les deux diagonalisables, alors A et B sont semblables.

TRUE

FALSE

3. Si $p_A(B) = 0$, alors A et B sont semblables.

TRUE

FALSE

4. Si A et B sont semblables, alors $p_A(B) = 0$.

TRUE

FALSE

Exercice 2. Soit V de dimension finie et B une base de V . Montrer que deux formes bilinéaires $f, g : V \times V \rightarrow K$ sont différentes si et seulement si $A_B^f \neq A_B^g$.

Exercice 3. Soit V de dimension finie et B une base de V . Une forme bilinéaire $f : V \times V \rightarrow K$ est symétrique si et seulement si A_B^f est symétrique.

Exercice 4. Montrer que \cong est une relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices $K^{n \times n}$.

Exercice 5. On considère les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ et } v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^4.$$

Est-ce que $\text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ possède une base orthogonale par rapport à la forme bilinéaire symétrique standard?

Exercice 6. Soit $V \subseteq \mathbb{R}_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3 sur \mathbb{R} avec le forme bilinéaire

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx.$$

1. Décrire la matrice $A_B^{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ pour $B = \{1, x, x^2, x^3\}$.
2. Montrer que l'ensemble $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ de polynômes

$$\begin{array}{ll} p_0 = 1 & p_1 = x \\ p_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) & p_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \end{array}$$

est une base orthogonale de V .

Exercice 7. Soit V un espace vectoriel sur un corps K et $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow K$ une forme bilinéaire. Soient $E \subseteq V$ et E^* le sous-espace de V engendré par les éléments de E . Montrer $E^\perp = E^{*\perp}$.

Rappel: Pour $W \subseteq V$, $W^\perp = \{v \in V : v \perp w \text{ pour tout } w \in W\}$.

Exercice 8. Transformez les matrices suivantes en matrices diagonales dont les éléments sont 0, 1 et -1 . Combien de 0's, 1's et -1 's sont sur la diagonale? (Ces numéros sont appelés l'indice de nullité, l'indice de positivité et l'indice de négativité.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$