Algèbre linéaire avancée II — Mardi 31 mars 2020
Prof. F. Eisenbrand — EPFL

L'exercice peut être rendu par e-mail aux assistants le mardi 7 avril avant la leçon d'exercice.

Étudiant(e) :

Salle :

Question 7 : *Cette question est notée sur* 8 *points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 *Réservé au correcteur*

Dans cet exercice, les thermes orthogonaux et orthonormaux sont relatif aux produit hermitien standard du $\mathbb{C}^n$.

1. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne. Montrer que si x et y sont deux vecteurs propres de A, $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$ et $\lambda \neq \mu$, alors x et y sont orthogonaux.
2. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne et soit $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ une base orthonormale des vecteurs propres de A, avec $Av_i = \lambda_i v_i$, pour $1 \leq i \leq n$. Soit $P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}$. Montrer que $P^*P = I_n$ et
$$P^*AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$
3. Soient $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne et P une matrice unitaire telles que
$$P^*AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$
avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Montrer que les colonnes $u_1, \dots, u_n$ de P sont des vecteurs propres de A avec les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.