L'exercice peut être rendu aux assistants le mardi 17 mars avant la leçon d'exercice.

Étudiant(e) :

Salle :

Question 4 : *Cette question est notée sur 8 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 *Réservé au correcteur*

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et soit $\langle . \rangle$ une forme bilinéaire symétrique sur V. L'espace de nullité est l'espace $V_0 := \{v \in V | \ \langle v, x \rangle = 0 \ \forall \ x \in V\}$.
Montrer que V admet une décomposition en somme directe

$$V_0 \oplus V^+ \oplus V^-$$

où V_0 est l'espace de nullité et V^+ et V^- sont des sous-espaces tels que

$$\langle v, v \rangle > 0 \text{ pour tout } v \in V^+ \setminus \{0\}$$

et

$$\langle v, v \rangle < 0 \text{ pour tout } v \in V^- \setminus \{0\}.$$