Algèbre linéaire avancée II
printemps 2020

Série 2

Exercice 1. Soient K un corps et n un entier positif. Montrer que la matrice $A \in K^{n\times n}$, donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

a le polynôme caractéristique $p_A(t) = (-1)^n(t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \dots + \alpha_1 t + \alpha_0)$.

Exercice 2. Soit $p(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i \in K[t]$, V un espace vectoriel sur K, et $f : V \to V$ un endomorphisme. Montrer que si λ est une valeur propre de f, alors $p(\lambda)$ est une valeur propre de $p(f)$, où $p(f)(v) = \sum_{i=0}^n a_i f^i(v)$ avec $f^0(v) = I(v)$.

Exercice 3.

1. Soit $A \in K^{n\times n}$ une matrice triangulaire inférieure, c-à-d

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

   Montrer que l'ensemble des valeurs propres de A est $\{a_{11}, \dots, a_{nn}\}$.

2. Est-ce que A est diagonalisable?

3. Est-ce que les deux matrices suivantes sont semblables?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Soit V un espace vectoriel sur un corps K de dimension finie, et $f : V \mapsto V$ un endomorphisme. Soit $p : V \mapsto V$ un automorphisme, c-a-d un endomorphisme inversible. Montrer que $\lambda \in K$ est une valeur propre de f si et seulement si λ est une valeur propre de l'endomorphisme $p^{-1} \circ f \circ p$.

Exercice 5. Soient K un corps, et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ les valeurs propres (comptées avec leur multiplicité) d'une matrice $A \in K^{n\times n}$.

Définition: La *trace* de A est définie par $\mathrm{Tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Démontrer les assertions suivantes:

i) $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$

ii) Si $p_A(\lambda) = \alpha_n\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$, montrer que $\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1}\,\mathrm{Tr}(A)$.

iii) $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$

iv) $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, où P est une matrice inversible.

Exercice 6.

1. Vérifier le Théorème de Cayley–Hamilton sur la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$
2. Soient K un corps, et $A \in K^{2\times 2}$. Soit $p_A(t) = t^2 + a_1t + a_0$ avec $a_0 \neq 0$. Calculer l'inverse de A à l'aide du Théorème de Cayley–Hamilton.
3. Considérer le Théorème de Cayley–Hamilton. On pourrait penser qu'il est possible d'utiliser l'argument $p_A(A) = \det(A\cdot I_n - A) = 0$ pour montrer le théorème. Montrer que ce raisonnement est faux.

Exercice 7.

1. Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & \mathrm{i} & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$,

   (b) $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,

   (c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

2. Calculer D^{100} pour la matrice $D = \begin{pmatrix} -10 & 2 & 2 \\ 2 & -10 & 2 \\ 2 & 2 & -10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

3. Déterminer pour quelles valeurs du couple (a, b) la matrice

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 0,$$

   est diagonalisable.