Algèbre linéaire avancée II
printemps 2020

Série 1

Exercice 1. Soient $V = \mathbb{R}_n[t]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n sur $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $B = \{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ une base et $v = (1, a, a^2, \ldots, a^n)^\intercal \in \mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que pour $p \in V$, on a $v^\intercal [p]_B = p(a)$, où $p(x) \in \mathbb{R}$ est l'évaluation de p en $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Calculer les valeurs propres et les espaces propres des matrices suivantes sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ (mais avec $\varphi \in [0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}$ dans le cas 2).

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Sachant que $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 10$, calculer $\det \begin{pmatrix} 4a & 4b & 4c \\ g & h & i \\ 3d+g & 3e+h & 3f+i \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Soient V un espace vectoriel de dimension n sur un corps $\mathbb{K}$, et $f : V \to V$ un endomorphisme. On dit qu'un sous-espace vectoriel $U \subseteq V$ est *invariant* par f si $f(U) \subseteq U$. Montrer que les espaces propres de $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ sont invariants par f.

Exercice 5. Soit $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ bijective (c-à-d une permutation). Soit $f_\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $f_\pi((x_1, x_2, \ldots, x_n)^\intercal) = (x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(n)})^\intercal$. Calculer toutes les valeurs propres de f_π et les espaces propres associés.

Exercice 6.

1. Montrer que l'égalité suivante donne l'équation de la droite de $\mathbb{R}^2$ passant par (x_1, y_1) et (x_2, y_2) :

$$\det \begin{pmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

2. Montrer que l'aire du triangle de sommets $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ et (x_3, y_3) est donnée par

$$\frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right|.$$

Hint: L'aire d'un triangle est la moiti de l'aire d'un paralllogramme. Un paralllogramme est l'image de l'ensemble $[0, 1]^2$ par une transformation linaire. Comment est-ce que l'aire d'un ensemble se comporte par transformation linaire ?