Algèbre linéaire avancée II
printemps 2019

Série 14 - Corrigé

Exercice 1. Soit $V = \mathbb{F}_3^3$ muni de la forme bilinéaire standard. Soit $W = \operatorname{span}\{(1,1,1)^T\}$.

i) Montrer que $W \subseteq W^\perp$.

ii) Montrer q'il existe $0 \neq u \in V \setminus (W + W^\perp)$.

Cela montre que pour une forme bilinéaire non-dégénérée sur V, on a $W \oplus W^\perp \neq V$ pas nécessairement (cf. théorème 2.27).

Solution. *i)* $W = \{(0,0,0)^T, (1,1,1)^T, (2,2,2)^T\}$.

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ b \\ b \end{pmatrix} \right\rangle = 3ab \equiv 0 \mod 3,$$

alors $\langle w, w' \rangle = 0$ *pour tous* $w, w' \in W$, $W \subseteq W^\perp$.

ii) On note que

$$W^\perp = \left\{ v \in \mathbb{F}_3^3 \mid v_1 + v_2 + v_3 \equiv 0 \mod 3 \right\},$$

car $\langle (a,a,a)^T, (v_1, v_2, v_3) \rangle = a(v_1 + v_2 + v_3)$, *et alors* $v_1 + v_2 + v_3 \equiv 0 \mod 3$ *pour* $a \neq 0$. *Puis* $(1,1,0)^T \notin W^\perp = W + W^\perp$ *avec partie i).*

Exercice 2. Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application telle que $Q(x) = 9x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3$.

a) Trouver une matrice symétrique $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ telle que $Q(x) = x^TAx$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$.

b) Soit B la base canonique. Trouver une base $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$, telle que $Q(x) = [x]_{B'}^T D [x]_{B'}$, oú D est une matrice diagonale.

Solution. *a) La matrice A que l'on cherche est simplement*

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -4 & 4 \\ -4 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

b) *On commence par calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. L'équation haractéristique de A est*

$$\begin{aligned} 0 &= det(A-\lambda I) = (9-\lambda)(7-\lambda)(11-\lambda) - 16(11-\lambda) - 16(7-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 27\lambda^2 - 207\lambda + 405 = -(\lambda-15)(\lambda-9)(\lambda-3) \end{aligned}$$

ainsi les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 15$, $\lambda_2 = 9$ et $\lambda_3 = 3$. Le premier vecteur propre satisfait $(A-\lambda_1 I)v_1 = 0$. On trouve $v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de la même façon, $v_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. La matrice $P_{B'B}$ qui satisfait $[x]_B = P_{B'B}[x]_{B'}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ est ainsi la matrice avec les colonnes v_1, v_2 et v_3:

$$P_{B'B} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^3$

$$Q(x) = [x]_B^T A[x]_B = (P_{B'B}[x]_{B'})^T A(P_{B'B}[x]_{B'}) = [x]_{B'} P_{B'B}^T A P_{B'B}[x]_{B'} = [x]_{B'} D[x]_{B'}.$$

où

$$D = (P_{B'B})^T A P_{B'B} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

est une matrice diagonale.

Exercice 3. Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, A, B deux bases de V, et $V^\star$ l'espace dual de V. Soient $A^\star, B^\star$ les bases duales pour A, B. Montrer pour les matrices des changement de base echanges:

$$P_{A,B} = P^T_{B^\star, A^\star}.$$

Solution. *Pour $n = \dim(V)$, soit*

$$\begin{aligned} A &= \{a_1, \dots, a_n\}, \\ B &= \{b_1, \dots, b_n\}, \\ A^\star &= \{\phi_1, \dots, \phi_n\}, \\ B^\star &= \{\psi_1, \dots, \psi_n\}. \end{aligned}$$

On sait que

$$\begin{aligned} [b_i]_A &= P_{B,A}[b_i]_B, \\ [\psi_j]_{A^\star} &= P_{B^\star, A^\star}[\psi_j]_{B^\star} \end{aligned}$$

qui implique que

$$b_i = \sum_{\ell=1}^{n} (P_{B,A})_{\ell,i} a_\ell,$$
$$\psi_j = \sum_{\ell=1}^{n} (P_{B^\star,A^\star})_{\ell,j} \phi_\ell.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\delta_{i,j} &= \psi_j(b_i) \\
&= \overbrace{\left(\sum_{\ell=1}^{n} (P_{B^\star,A^\star})_{\ell,j} \phi_\ell\right)}^{\psi_j} \overbrace{\left(\sum_{\ell=1}^{n} (P_{B,A})_{\ell,i} a_\ell\right)}^{(b_i)} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} (P_{B^\star,A^\star})_{\ell,i} (P_{B,A})_{\ell,j} \\
&= \left(P^T_{B^\star,A^\star} P_{B,A}\right)_{i,j}.
\end{aligned}$$

Comme les matrices $P_{B,A}$ et $P_{B^\star,A^\star}$ sont de rangs pleines, on obtenir $P^T_{B^\star,A^\star} = P^{-1}_{B,A} = P_{A,B}$.

Exercice 4. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice orthogonale, alors une décomposition de A en valeurs singulières est $A = AI_nI_n$.

2. Les valeurs singulières d'une matrice diagonale $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sur la diagonale sont les valeurs diagonales $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Solution.

1. *C'est vrai. Pour trouver une décomposition en SVD, on doit diagonaliser A^TA, où $A^TA = I_n$. Ainsi, les valeurs propres sont $\lambda_i = 1$ et les vecteurs propres de A^TA sont les vecteurs e_i de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, ainsi $Q = I_n$. La matrice $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est diagonale avec les $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ sur la diagonale. Ainsi, $D = I_n$ et on obtient*

$$A = PDQ = PI_nI_n,$$

   et la seule solution pour la matrice P est $P = A$.

2. *C'est faux. En effet, les valeurs singulières sont toujours positives, et on les obtient avec $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i^2} = |\lambda_i|$, où λ_i sont les valeurs propres de $A^TA = A^2$. Les valeurs singulières sont les valeurs absolues des valeurs propres non nulles λ_i.*

Exercice 5. Montrer que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice symétrique définie positive, alors toute diagonalisation de A en base orthonormée $A = PDP^T$ est une décomposition en valeurs singulières de A.

Solution. *Soit $A = PDP^T$ une décomposition en base orthonormée de A. Alors comme la matrice A est définie positive, les entrées de la matrice diagonale D sont positives, car il s'agit des valeurs propres de A. Afin que PDP^T soit une SVD, il faut que P et P^T soient des matrices orthogonales. La matrice P est déja orthogonale par définition de la décomposition. On montre que P^T est orthogonale $\iff$ $P^T(P^T)^T = I_n$, i.e. $(P^T)^{-1} = (P^T)^T$. On a*

$$(P^T)^{-1} = (P^{-1})^{-1} = P = (P^T)^T,$$

ainsi P^T est orthogonale et PDP^T est une SVD de la matrice A.

Exercice 6. Soient $V = \mathbb{R}^3$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire standard,

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \ \lambda \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3,$$
$$L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \ \lambda \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

deux lignes dans $\mathbb{R}^3$. Déterminer la distance entre les lignes,

$$\mathrm{dist}(L_1, L_2) := \min\{||x - y|| : \ x \in L_1, \ y \in L_2\}.$$

Solution. *On a*

$$\begin{aligned} &\min_{\alpha,\beta} \left|\left| \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) - \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \right|\right| \\ = &\min_{\alpha,\beta} \left|\left| \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right|\right|. \end{aligned}$$

Par le Théorème 2.21, la solution optimale est la solution pour

$$A^T A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = A^T b, \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \alpha = 0, \ \beta = 4$$

$$\Rightarrow \mathrm{dist}(L_1, L_2) = \left|\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right|\right| = \sqrt{3}.$$

Exercice 7. Soient $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$. Pour $z \in \mathbb{R}^n$ et $v \in S^{n-1}$, on considère le droite $L_{z,v}$ défini comme

$$L_{z,v} = \{z + \lambda \cdot v : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Soit $d(a_i, L_{z,v})$ la distance de a_i à $L_{z,v}$ pour $i = 1, \ldots, m$.

i) Supposons que $\sum_{i=1}^m a_i = 0$. Montrer $\sum_{i=1}^m d(a_i, L_{z,v})^2 \geq \sum_{i=1}^m d(a_i, L_{0,v})^2$ pour tout $z \in \mathbb{R}^n$.

ii) Conclure que, étant donnés des points $a_1, \ldots, a_m$, on peut trouver $z \in \mathbb{R}^n$ et $v \in S^{n-1}$ tel que

$$\sum_{i=1}^m d(a_i, L_{z,v})^2 \leq \sum_{i=1}^m d(a_i, L_{z',v'})^2,$$

pour tous $z' \in \mathbb{R}^n$ et $v' \in S^{n-1}$. En particulier:

(a) Donner une formule pour z.

(b) Décrire la matrice A telle qu'un vecteur propre normalisé de $A^T \cdot A$ associé à la valeur propre la plus grande est une solution pour v.

iii) Étant donnés des points $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ où $m > n > 1$, est-ce que le droite $L_{z,v}$ qui minimise $\sum_{i=1}^m d(a_i, L_{z,v})^2$ est unique?

Solution. *(courte)*

(i)

$$\sum_{i=1}^m d(a_i, L_{0,v})^2 = \sum_{j=1}^m \|a_i\|^2 - \langle a_i, v\rangle^2$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m d(a_i, L_{z,v})^2 &= \sum_{i=1}^m \left(\|a_i - z\|^2 - \langle a_i - z, v\rangle^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^m \left(\|a_i\|^2 - 2\langle a_i, z\rangle + \|z\|^2 - \langle a_i, v\rangle^2 + 2\langle a_i, v\rangle\langle z, v\rangle - \langle z, v\rangle^2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m d(a_i, L_{z,v})^2 - \sum_{i=1}^m d(a_i, L_{0,v})^2 &= \sum_{i=1}^m \left(-2\langle a_i, z\rangle + \|z\|^2 + 2\langle a_i, v\rangle\langle z, v\rangle - \langle z, v\rangle^2\right) \\
&= m\left(\|z\|^2 - \langle z, v\rangle^2\right) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

(ii) *Note that translating everything by $-t \in \mathbb{R}^n$ does not change anything, i.e. if we replace each a_i by $a_i' = a_i - t$ and $L_{z,v}$ by $L_{z',v}$ with $z' = z - t$, then we have*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m d(a_i, L_{z,v})^2 &= \sum_{i=1}^m \left(\|a_i - z\|^2 - \langle a_i - z, v\rangle^2\right)\\ &= \sum_{i=1}^m \left(\|a_i' + t - z\|^2 - \langle a_i' + t - z, v\rangle^2\right)\\ &= \sum_{i=1}^m \left(\|a_i' - z'\|^2 - \langle a_i' - z', v\rangle^2\right)\\ &= \sum_{i=1}^m d(a_i, L_{z,v})^2 = \sum_{i=1}^m d(a_i', L_{z',v})^2.\end{aligned}$$

Hence, with part (i), we have

a) $z = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m a_i$,

b) *By the lecture, we know how to find an optimal one-dimensional subspace. Hence, if we know that an optimal line has to go through zero, we can use this knowledge. We shift all vectors a_i to the origin, and obtain the matrix*

$$A = \begin{pmatrix} (a_1')^\intercal \\ \vdots \\ (a_m')^\intercal \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1 - z)^\intercal \\ \vdots \\ (a_m - z)^\intercal \end{pmatrix}.$$

(iii) *Non. Exemple: $e_1, e_2, -e_1, -e_2 \in \mathbb{R}^2$. These points sum up to zero, but two lines $L_{0,v}$ and $L_{0,v^\perp}$ orthogonal to each other always result in the same sum of squared distances. Hence, an optimal solution through 0, whatever it is, cannot be unique.*