Algèbre linéaire avancée II
printemps 2019

Série 10 - Corrigé

Exercice 1. Soit $f(t)$ un polynôme avec des coefficients réels. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de f complexe. Montrer que $\bar{\alpha}$ est aussi une racine de f.

Solution. *On suppose que $f(\alpha) = 0$, alors $0 = \overline{f(\alpha)} = f(\overline{\alpha})$, où la dernière égalité est vraie parce que tous les coefficients de f sont réels.*

Exercice 2. Soient f et g des polynômes sur $\mathbb{Z}[t]$. Si le polyôme $g(t)$ a 1 comme coefficient devant le plus haut degré (i.e., $g(t) = t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \cdots + b_1 t + b_0$), montrer que quand on exprime f avec la décomposition $f = qg + r$ avec $\deg(r) < \deg(g)$, alors les polynômes q et r sont sur $\mathbb{Z}$.

Solution. *On pose $n = \deg(f)$ et $m = \deg(g)$. On fixe le degré de g.*
Si $n < m$, alors on a $q = 0$ et et $r = f$. On a alors que q et r sont des polynômes sur $\mathbb{Z}[t]$.
On suppose que c'est vrai pour $\deg(f) = n-1$, i.e., les polynômes q et r de la décomposition $f = gq + r$ sont dans $\mathbb{Z}[t]$.
On montre que c'est vrai pour $\deg(f) = n$. On a $g(t) = t^m + b_{m-1}t^{m-1} + \cdots + b_1 t + b_0$, avec $b_i \in \mathbb{Z}$ pour $i = 0, \ldots, m-1$. On peut écrire

$$\tilde{f}(t) = f(t) - a_n t^{n-m} g(t), \qquad \textit{avec } \deg(\tilde{f}) < \deg(f).$$

Comme $f, g \in \mathbb{Z}[t]$, $\tilde{f} \in \mathbb{Z}[t]$ et par hypothèse de récurrence, il existe deux polynômes $\tilde{q}, \tilde{r} \in \mathbb{Z}[t]$ tels que

$$\tilde{f} = \tilde{q}g + \tilde{r} \quad \textit{ et deg}(\tilde{r}) < \deg(g).$$

Ainsi,

$$f(t) = a_n t^{n-m} g(t) + \tilde{f}(t) = a_n t^{n-m} g(t) + \tilde{q}(t)g(t) + \tilde{r}(t) = (a_n t^{n-m} + \tilde{q}(t))g(t) + \tilde{r}(t).$$

Le coefficient a_n est un entier et $q(t) = a_n t^{n-m} + \tilde{q}$ et $\tilde{r}$ ont des coefficients entiers.

Exercice 3. Soit $f(t) = a_n t^n + \ldots + a_0$ un polynôme à coefficients complexes et $a_n = 1$, $\deg(f) = n$ et soit α une racine. Montrer que $|\alpha| \leq n \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$.
Indication: écrire $-\alpha^n = a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_0$, diviser par α^n et prendre la valeur absolue.

Solution. *Si $|\alpha| \leq 1$, il n'y a pas de problème. En effet, le coefficient dominant de f est $a_n = 1$, ainsi $|\alpha| \leq n \max_{0\leq i\leq n} |a_i|$ est vérifié car $\max |a_i| \geq 1$. Supposons que $|\alpha| > 1$. Alors, on peut diviser*

$$-\alpha^n = a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_0,$$

par α^n ainsi

$$-1 = a_{n-1}\alpha^{-1} + \ldots + a_0\alpha^{-n}.$$

En prenant la valeur absolue et en utilisant l'inégalité du triangle et notre hypothèse que $|\alpha| > 1$, on obtient

$$1 \leq |a_{n-1}||\alpha|^{-1} + \ldots + |a_0||\alpha|^{-n} \leq |a_{n-1}||\alpha|^{-1} + \ldots + |a_0||\alpha|^{-1} = |\alpha|^{-1}(|a_0| + \cdots + |a_{n-1}|).$$

Alors

$$|\alpha| \leq (|a_0| + \cdots + |a_{n-1}|) \leq n \max_{0\leq i\leq n} |a_i|.$$

Exercice 4. Compléter la preuve du théorème 4.22: Montrer que les orbites de

$$x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_\ell$$

engendrent encore V. (Où les x_i et y sont les mêmes que dans le dmonstration du théorème 4.22).

Solution. *Rappelons que*

$$x_i = \frac{1}{\gamma_i} y - \frac{1}{\gamma_i} \sum_{j\in J, j\neq i} \gamma_j N^{m_j - 1 - m} x_j.$$

Ainsi, pour tout élément $N^k x_i$ de l'orbite de x_i, on a

$$N^k x_i = \frac{1}{\gamma_i} N^k y - \frac{1}{\gamma_i} \sum_{j\in J, j\neq i} \gamma_j N^{m_j - 1 - (m-k)} x_j.$$

Ceci implique que tout élément qui est une combinaison linéaire des éléments des orbites de $x_1, \ldots, x_l$ peut être écrit comme combinaison linéaire des éléments des orbites de

$$x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_l.$$

Exercice 5. Soit $T\colon V \to V$ un endomorphisme. Soit $\phi : V \to \mathbb{C}^n$ l'isomophisme associé à une base B de V. Supposons que A_B, la matrice de T relativement à la base B, admette une forme normale de Jordan J avec matrice de passage P.
Montrez qu'il existe des sous-espaces $V_1, ..., V_k$ de V tels que

a) $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$,

b) $\forall i$: $T(V_i) \subset V_i$ et $T_{|V_i} = N_i + \lambda_i I$, oú $N_i\colon V_i \to V_i$ est nilpotente, et $\{\lambda_1, ..., \lambda_k\} = \{J_{11}, ..., J_{nn}\}$.

Solution. *Il faut juste remarquer que l'on peut choisir les sous-espaces du Lemme 4.20 correspondant aux blocs de Jordan. Soit $P = P_{BD}$ la matrice de changement de base de la base B une base D. On a*

$$A_B = P^{-1}JP \quad \Leftrightarrow \quad J = PA_BP^{-1}.$$

Ainsi,

$$[T(d_i)]_D = PA_BP^{-1}[d_i]_D = Je_i,$$

ce qui veut dire que T agit sur d_i (dans V) comme J sur e_i (dans $\mathbb{C}^n$). Pour $i = 1, \dots, k$, dénotons par $J_i \in \mathbb{C}^{m_i \times m_i}$ le i-ième bloc de Jordan de J, i.e. $J = \operatorname{diag}(J_1, \dots, J_k)$. Pour $i = 1, \dots, k$, définissons

$$V_i = \operatorname{span}\left\{ d_j \;\middle|\; \sum_{\ell=1}^{i-1} m_\ell < j \leq \sum_{\ell=1}^{i} m_\ell \right\} \subseteq V$$

le sous-espace de V correspondant au i-ième bloc de Jordan (les m_i correspondent aux tailles des blocs de Jordan dans J).

a) *Chaque V_i est généré par un sous-ensemble d'une base. Chaque élément de la base est contenu dans un V_i, montrant ainsi que $V = V_1 + \cdots + V_k$, et aucun élément de la base n'est contenu dans deux sous-espaces $V_i, V_{i'}$, montrant ainsi que la somme est directe.*

b) *Fixons un sous-espace V_ℓ, et définissons $i_0 = \sum_{j=1}^{\ell-1} m_j$. Comme J agit sur $\operatorname{span}\{e_{i_0+1}, \dots, e_{i_0+\ell}\} \subseteq \mathbb{C}^n$ comme le ℓ-th bloc de Jordan agit sur $\mathbb{C}^{m_\ell}$, on a $T(d_i) = \lambda_\ell d_i + d_{i+1} \in V_\ell$ si $i_0 < i < i_0 + m_\ell$, et $T(d_{i_0+m_\ell}) = \lambda_\ell d_{i_0+m_\ell}$. Ainsi, $T(V_\ell) \subseteq V_\ell$, et on peut écrire $T_{|V_i} = N_i + \lambda I$ pour un décalage (donc nilpotent) N_i, et des λ_i provenant de la diagonale de J.*

Exercice 6. Soit $T \colon V \to V$ un endomorphisme et soit $V_1, ..., V_k$ une décomposition de V tel que $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$, $T(V_i) \subseteq V_i$ et $T_{|V_i} = N_i + \lambda_i I$, où $N_i : V_i \to V_i$ est nilpotente. Montrez que :

a) $V_i \subseteq \ker(T - \lambda_i I)^{a_i}$ pour un entier a_i tel que $N_i^{a_i} = 0$.

b) Les $\lambda_1, ..., \lambda_k$ sont des valeurs propres (pas forcément distinctes) de T. (*Indice* : Utiliser par exemple le premier point).

c) Le polynôme $f(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - \lambda_i I)^{a_i}$ annule T. (*Indice* : Montrer que $f(T)(v) = 0$ pour tout $v \in V$ en utilisant la décomposition de V et le premier point).

d) En déduire que l'ensemble $\{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ contient toutes les valeurs propres de T (*Indice* : Si $v \neq 0$ est un vecteur propre de T de valeur propres λ, exprimer $f(T)(v)$ en fonction de f, λ, et v).

e) En déduire que les valeurs sur la diagonale de n'importe quelle forme normale de Jordan de T constituent l'ensemble des valeurs propres de T. (*Indice* : S'inspirer de la résolution de l'exercice 5.)

Solution. *a) Pour un i fixé, soit $v \in V_i$ et a_i le plus petit entier tel que $N_i^{a_i} = 0$. Comme $T_{|V_i}(u) = T(u)\ \forall u \in V_i$ et $T(V_i) \subseteq V_i$, on a*

$$\begin{aligned}(T-\lambda_i I)^{a_i}(v) &= (T_{|V_i} - \lambda_i I)^{a_i}(v)\\ &= (N_i + \lambda_i I - \lambda_i I)^{a_i}(v)\\ &= N_i^{a_i}(v)\\ &= 0.\end{aligned}$$

b) Soit a_i comme ci-dessus et $0 \neq v \in (T-\lambda_i I)^{a_i-1}(V_i) \subseteq V_i$. Alors

$$0 = (T-\lambda_i I)(v) = T(v) - \lambda_i v,$$

donc v est un vecteur propre de valeur propre λ_i.

c) Soit $v \in V$. On peut écrire $v = \sum_{i=1}^k v_i$ avec $v_i \in V_i$. Remarquons que $(T-\lambda_i I)^{a_i}(v_j) \in V_j$ pour tout $v_j \in V_j$ (car $(T-\lambda_i I)^{a_i}$ et $(T-\lambda_j I)^{a_j}$ commutent), et donc en appliquant les termes $(T-\lambda_j I)^{a_j}$ l'un après l'autre, on obtient

$$\begin{aligned}f(T)(v) &= \left(\prod_{i=1}^k (T-\lambda_i I)^{a_i}\right)(v)\\ &= \left(\prod_{i=1}^k (T-\lambda_i I)^{a_i}\right)(v_1 + \cdots + v_k)\\ &= \left(\prod_{i=1}^{k-1} (T-\lambda_i I)^{a_i}\right)((T-\lambda_k I)^{a_k}(v_1 + \dots v_k))\\ &= \left(\prod_{i=1}^{k-1} (T-\lambda_i I)^{a_i}\right)\left(\underbrace{(T-\lambda_k I)^{a_k}(v_1)}_{=:v_1' \in V_1} + \cdots + \underbrace{(T-\lambda_k I)^{a_k}(v_k)}_{=0}\right)\\ &= \left(\prod_{i=1}^{k-1} (T-\lambda_i I)^{a_i}\right)(v_1 + \cdots + v_{k-1})\\ &\ \vdots\\ &= 0.\end{aligned}$$

où on a utilisé que $V_i \subseteq \ker(T-\lambda_i)^{a_i}$ par la partie a).

d) Si $v \in V$ est un vecteur propre de valeur propre $\lambda \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, remarquons que pour tout i, on a

$$\begin{aligned} & & (T-\lambda_i I)(v) &= \underbrace{(\lambda - \lambda_i)}_{\neq 0} v\\ &\Rightarrow & (T-\lambda_i I)^{a_i}(v) &= (\lambda-\lambda_i)^{a_i} v\\ &\Rightarrow & \left(\prod_{i=1}^k (T-\lambda_i I)^{a_i}\right)(v) &= \prod_{i=1}^k (\lambda-\lambda_i)^{a_i} v\\ & & &\neq 0.\end{aligned}$$

e) *On a montré que $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ contient toutes les valeurs propres de T (partie d)), et que chaque λ_i est une valeur propre. Par l'exercice 5, si J est une forme normale de Jordan quelconque de T, on peut trouver une décomposition de T comme dans l'énoncé de l'Exercice 6 de sorte que les λ_i sont précisément les éléments diagonaux de J.*

Exercice 7. Vrai ou faux:

a) Si J est la forme normale de Jordan pour une matrice A, J^2 est la forme normale de Jordan pour A^2.

b) Si A et B sont deux matrices $\in \mathbb{C}^{n\times n}$, les matrices AB et BA ont les mêmes formes normales de Jordan.

Solution.

a) *Faux. Soit J une matrice en forme de Jordan. On a que J^2 n'est pas nécessairement une matrice en forme de Jordan. Par exemple si*

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

alors

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

et on voit clairement que J^2 n'est pas en forme de Jordan.

b) *Faux. La multiplication n'est pas commutative. Par exemple on peut considérer*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

et on obtient

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

AB et BA sont deux matrices en forme de Jordan différentes.

Exercice 8. Donner la forme normale de Jordan J pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & -3 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix} .$$

Solution. *On commence par trouver les valeurs propres de A. On a que le polynôme caractéristique de A est*

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3)\,.$$

donc la forme normale de Jordan de A est

$$J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \textit{ou} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La multiplicité géométrique de $\lambda = 2$ est 1, donc A n'est pas diagonalisable et la forme normale de Jordan J est $J = J_2$.