Algèbre linéaire avancée II
printemps 2019

Série 14

Exercice 1. Soit $V = \mathbb{F}_3^3$ muni de la forme bilinéaire standard. Soit $W = \operatorname{span}\{(1,1,1)^T\}$.

i) Montrer que $W \subseteq W^\perp$.

ii) Montrer q'il existe $0 \neq u \in V \setminus (W + W^\perp)$.

Cela montre que pour une forme bilinéaire non-dégénérée, on a $W \oplus W^\perp \neq V$ pas nécessairement (cf. théorème 2.27).

Exercice 2. Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application telle que $Q(x) = 9x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3$.

a) Trouver une matrice symétrique $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ telle que $Q(x) = x^T A x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$.

b) Soit B la base canonique. Trouver une base $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$, telle que $Q(x) = [x]_{B'}^T D [x]_{B'}$, oú D est une matrice diagonale.

Exercice 3. Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, A, B deux bases de V, et $V^\star$ l'espace dual de V. Soient $A^\star, B^\star$ les bases duales pour A, B. Montrer pour les matrices des changement de base echanges:

$$P_{A,B} = P_{B^\star,A^\star}^T.$$

Exercice 4. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice orthogonale, alors une décomposition de A en valeurs singulières est $A = AI_nI_n$.

2. Les valeurs singulières d'une matrice diagonale $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sur la diagonale sont les valeurs diagonales $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Exercice 5. Montrer que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice symétrique définie positive, alors toute diagonalisation de A en base orthonormée $A = PDP^T$ est une décomposition en valeurs singulières de A.

Exercice 6. Soient $V = \mathbb{R}^3$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire standard,

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \ \lambda \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3,$$
$$L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \ \lambda \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

deux lignes dans $\mathbb{R}^3$. Déterminer la distance entre les lignes,

$$\operatorname{dist}(L_1, L_2) := \min \{ ||x - y|| : \ x \in L_1, \ y \in L_2 \} .$$

Exercice 7. Soient $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$. Pour $z \in \mathbb{R}^n$ et $v \in S^{n-1}$, on considère le droite $L_{z,v}$ défini comme

$$L_{z,v} = \{ z + \lambda \cdot v : \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

Soit $d(a_i, L_{z,v})$ la distance de a_i à $L_{z,v}$ pour $i = 1, \ldots, m$.

i) Supposons que $\sum_{i=1}^m a_i = 0$. Montrer $\sum_{i=1}^m d(a_i, L_{z,v})^2 \geq \sum_{i=1}^m d(a_i, L_{0,v})^2$ pour tout $z \in \mathbb{R}^n$.

ii) Conclure que, étant donnés des points $a_1, \ldots, a_m$, on peut trouver $z \in \mathbb{R}^n$ et $v \in S^{n-1}$ tel que

$$\sum_{i=1}^m d(a_i, L_{z,v})^2 \leq \sum_{i=1}^m d(a_i, L_{z',v'})^2,$$

pour tous $z' \in \mathbb{R}^n$ et $v' \in S^{n-1}$. En particulier:

(a) Donner une formule pour z.

(b) Décrire la matrice A telle qu'un vecteur propre normalisé de $A^T \cdot A$ associé à la valeur propre la plus grande est une solution pour v.

iii) Étant donnés des points $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ où $m > n > 1$, est-ce que le droite $L_{z,v}$ qui minimise $\sum_{i=1}^m d(a_i, L_{z,v})^2$ est unique?