Prof. Friedrich Eisenbrand 15 mai 2019

Algèbre linéaire avancée II
printemps 2019

Série 12

Exercice 1. Soit $G = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ un matrice symétrique, unimodulaire, et définie positive. Montrer qu'il existe une matrice unimodulaire U telle que $G = U^\intercal U$.

Remarque: L'énoncé est vrai jusqu'à la dimension 7, mais en dimension 8 il existe un exemple où la décomposition n'est pas possible.

Exercice 2. Montrer qu'un réseau entier $\Lambda(A)$, pour une matrice $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ de rang ligne plein est un groupe abelien.

Exercice 3. Montrer que pour chaque n, il y a une matrice $A \in \mathbb{Z}^{n\times(n+1)}$ avec colonnes $A = (a_1, \ldots, a_{n+1})$ tel que les assertions suivantes sont vraies:

i) Pour chaque $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, l'ensemble $R_i = \{a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_{n+1}\}$ forme une base d'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

ii) Aucune sous-matrice A_i, définie comme la matrice A sans la i-éme colonne, ne génère le même réseau entier que A, c.-à-d. $\forall A_i$: $\Lambda(A) \neq \Lambda(A_i)$, où

$$\Lambda(A) = \left\{ \sum_{j=1}^{n+1} a_j z_j \,\middle|\, z_j \in \mathbb{Z},\, j \in \{1, \ldots, n+1\} \right\}$$
$$\Lambda(A_j) = \left\{ \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n+1} a_j z_j \,\middle|\, z_j \in \mathbb{Z}, j \in \{1, \ldots, n+1\} \setminus \{i\} \right\}.$$

Exercice 4. Montrer que d dans le lemme 5.6 est le gcd de la première ligne de A. En d'autres mots, montrer le lemme suivant.

<u>*Lemme.*</u> Soit $A \in Z^{m\times n}$ une matrice en nombres entiers de plein ligne rang, alors il existe une matrice unimodulaire $U \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, tel que la première ligne de AU est de la forme $(d, 0, \ldots, 0)$ où $d = \gcd(a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n})$.

Exercice 5. Calculer la forme normale de Smith pour

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 9 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 21 & 0 & 8 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 9 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & -5 & 15 & 0 & 10 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

(Vous pouvez utiliser le fichier python sur la page web du cours.)

Exercice 6. Soit G un groupe. Le centre de G est définie par $Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz \; \forall\, g \in G\}$.

i) Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.

ii) Montrer que si G est abelien, alors $Z(G) = G$.

Exercice 7. Soit H un sous-groupe de G, tel que pour chaque $a \in G$, il y a un $b \in G$ avec $aH = Hb$. Montrer que H est un sous-groupe normal de G, $H \lhd G$.

Exercice 8. Soit $N \lhd G$ et $K \lhd G$. Montrer que $N \cap K \lhd G$.