Algèbre linéaire avancée II
printemps 2019

Série 11

Exercice 1. Soient $a, b, \lambda \in \mathbb{Z}$, et $a \neq 0$. Montrer que

$$g \mid a \text{ et } g \mid b \qquad \Leftrightarrow \qquad g \mid b \text{ et } g \mid (a - \lambda b).$$

Conclure que $\gcd(a, b) = \gcd(b, a - \lambda b)$.

Exercice 2. Soit $U \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ une matrice unimodulaire.

i) Montrer que U^{-1} est aussi unimodulaire.

ii) Montrer que $\mathbb{Z}^n = \{Uz \mid z \in \mathbb{Z}^n\}$, c'est a dire que U est un automorphisme sur $\mathbb{Z}^n$.

Exercice 3. Soit $U \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ une matrice unimodulaire. Montrer qu'il existe un $m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ et des matrices E_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$ tels que

i) chaque E_i représente une opération élémentaire unimodulaire, (cf. définition 5.4),

ii) on a $U = E_1 \cdot E_2 \cdots E_m$.

Exercice 4. Utiliser l'algorithme d'Euclide étendu pour calculer p, q avec

$$\gcd(1463, 1235) = 1463p + 1235q.$$

Exercice 5. Soient $n \geq 2$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ pas tous égaux à zéro. On définit

$$\gcd(a_1, \ldots, a_n) := \max\{z \in \mathbb{Z} : \ z \mid a_1, \ z \mid a_2, \ldots, z \mid a_n\}$$

comme le plus grand diviseur commun de $a_1, \ldots, a_n$. Montrer:

i) $\gcd(a_1, \ldots, a_n) = \min\{x_1a_1 + \cdots + x_na_n \ : \ x_1a_1 + \cdots + x_na_n \geq 1, \ x_i \in \mathbb{Z}, \ i = 1, \ldots, n\}$.

ii) $\gcd(a_1, \ldots, a_n) = \gcd(\gcd(a_1, a_2), a_3, \ldots, a_n)$ pour $n \geq 3$.

Exercice 6. Montrer que le systéme $Ax = 0$ a une solution $0 \neq z^\star \in \mathbb{Z}^n$ pour chaque matrice $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ avec $m < n$.

Exercice 7. Parmi les matrices suivantes, lesquelles génèrent le même réseau?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(Vous pouvez utiliser le fichier python sur la page web du cours.)