Algèbre linéaire avancée II
printemps 2019

Série 10

Exercice 1. Soit $f(t)$ un polynôme avec des coefficients réels. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de f complexe. Montrer que $\bar{\alpha}$ est aussi une racine de f.

Exercice 2. Soient f et g des polynômes sur $\mathbb{Z}[t]$. Si le polyôme $g(t)$ a 1 comme coefficient devant le plus haut degré (i.e., $g(t) = t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \cdots + b_1 t + b_0$), montrer que quand on exprime f avec la décomposition $f = qg + r$ avec $\deg(r) < \deg(g)$, alors les polynômes q et r sont sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 3. Soit $f(t) = a_n t^n + \ldots + a_0$ un polynôme à coefficients complexes et $a_n = 1$, $\deg(f) = n$ et soit α une racine. Montrer que $|\alpha| \leq n \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$.
Indication: écrire $-\alpha^n = a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_0$, diviser par α^n et prendre la valeur absolue.

Exercice 4. Compléter la preuve du théorème 4.22: Montrer que les orbites de

$$x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_\ell$$

engendrent encore V. (Où les x_i et y sont les mêmes que dans le dmonstration du théorème 4.22).

Exercice 5. Soit $T\colon V \to V$ un endomorphisme. Soit $\phi : V \to \mathbb{C}^n$ l'isomophisme associé à une base B de V. Supposons que A_B, la matrice de T relativement à la base B, admette une forme normale de Jordan J avec matrice de passage P.
Montrez qu'il existe des sous-espaces $V_1, ..., V_k$ de V tels que

a) $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$,

b) $\forall i$: $T(V_i) \subset V_i$ et $T_{|V_i} = N_i + \lambda_i I$, oú $N_i\colon V_i \to V_i$ est nilpotente, et $\{\lambda_1, ..., \lambda_k\} = \{J_{11}, ..., J_{nn}\}$.

Exercice 6. Soit $T\colon V \to V$ un endomorphisme et soit $V_1, ..., V_k$ une décomposition de V tel que $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$, $T(V_i) \subseteq V_i$ et $T_{|V_i} = N_i + \lambda_i I$, où $N_i : V_i \to V_i$ est nilpotente.
Montrez que :

a) $V_i \subseteq \ker(T - \lambda_i I)^{a_i}$ pour un entier a_i tel que $N_i^{a_i} = 0$.

b) Les $\lambda_1, ..., \lambda_k$ sont des valeurs propres (pas forcément distinctes) de T. (*Indice* : Utiliser par exemple le premier point).

c) Le polynôme $f(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - \lambda_i I)^{a_i}$ annule T. (*Indice* : Montrer que $f(T)(v) = 0$ pour tout $v \in V$ en utilisant la décomposition de V et le premier point).

d) En déduire que l'ensemble $\{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ contient toutes les valeurs propres de T (*Indice* : Si $v \neq 0$ est un vecteur propre de T de valeur propres λ, exprimer $f(T)(v)$ en fonction de f, λ, et v).

e) En déduire que les valeurs sur la diagonale de n'importe quelle forme normale de Jordan de T constituent l'ensemble des valeurs propres de T. (*Indice* : S'inspirer de la résolution de l'exercice 5.)

Exercice 7. Vrai ou faux:

a) Si J est la forme normale de Jordan pour une matrice A, J^2 est la forme normale de Jordan pour A^2.

b) Si A et B sont deux matrices $\in \mathbb{C}^{n\times n}$, les matrices AB et BA ont les mêmes formes normales de Jordan.

Exercice 8. Donner la forme normale de Jordan J pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & -3 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$